



PREMIS A TREBALLS DE RECERCA DE LA UdL
per a l'estudiantat de batxillerat i cicles formatius de grau superior

Estudi aerodinàmic del vol de les sàmares

Ester Gil Navarro

Tutor/a: Anicet Cosials
Manonelles

Centre: INS Guindàvols (Lleida)

Data: 2019



ESTUDI AERODINÀMIC DEL VOL DE LES SÀMARES

Àrea Tecnològica

“La majoria de les idees fonamentals de la ciència són essencialment senzilles i, per regla general poden ser expressades en un llenguatge comprensible per a tots”

Albert Einstein

“La naturalesa es complau amb la simplicitat. I la naturalesa no és nècia”

Isaac Newton

“Soc de les que pensen que la ciència té una gran bellesa. Un científic en el seu laboratori no només és un tècnic: també és un infant col·locat davant fenòmens naturals que l'impressionen com en un conte de fades”

Marie Curie

ÍNDEX

1. INTRODUCCIÓ.....	1
2. OBJECTIUS	4
2.1 OBJECTIUS TEÒRICS I DE RECERCA.....	4
2.2 OBJECTIUS PRÀCTICS I D'EXPERIMENTACIÓ	4
3. MARC TEÒRIC	5
3.1 LLEIS FÍSQUES IMPLICADES EN EL VOL DELS OBJECTES	5
3.1.1 Aerodinàmica	5
3.1.2 Principi de Bernoulli	5
3.1.3 Efecte Coandă	7
3.2 LLEIS FÍSQUES DE LA DINÀMICA DE ROTACIÓ.....	8
3.2.1 Centre de masses	8
3.2.2 Els sòlids rígids.....	8
3.2.3 Rotació del sòlid rígid	9
3.2.4 Moment angular.....	10
3.2.5 Segona llei de Newton aplicada a la dinàmica de la rotació	13
3.3 LLAVORS	15
3.3.1 Història evolutiva de les plantes	16
3.3.2 Origen de les llavors	19
3.3.3 Propagació de les llavors	20
3.3.4 El vol de les llavors	25
4. DETERMINACIÓ EXPERIMENTAL DE LES MILLORS CONDICIONS ESTRUCTURALS D'UN HELICÒPTER DE PAPER PER ASSOLIR UNA VELOCITAT TERMINAL MÍNIMA	30
4.1 DESCRIPCIÓ DE L'EXPERIMENT	30
4.2 UTILITATGE	30
4.2.1 Material.....	30
4.2.2 Aparells electrònics d'enregistrament	31
4.2.3 Programes informàtics	32
4.3 DIBUIX DEL MUNTATGE	33
4.4 PROCEDIMENT	34
4.4.1 Construcció d'un helicòpter de paper.....	34
4.4.2 Enregistrament dels vídeos	35
4.4.3 Anàlisi dels vídeos a partir del Tracker	37
4.4.4 Traspàs de les dades al <i>Curve expert</i>	41
4.5. OBSERVACIÓ DELS RESULTATS, ANÀLISI I DISCUSSIÓ	45
4.5.1 Variació de la massa	46
4.5.2 Variació de l'angle d'obertura.....	55
4.5.3 Variació de la longitud de les ales	65
5. DETERMINACIÓ EXPERIMENTAL DE LA DENSITAT DE L'AIRE	75

5.1 DESCRIPCIÓ DE L'EXPERIMENT	75
5.2 UTILLATGE	76
5.3 DIBUIX DEL MUNTATGE	76
5.4 PROCEDIMENT	77
5.5 RESULTATS OBTINGUTS ANÀLISI I DISCUSSIÓ	77
6. DETERMINACIÓ EXPERIMENTAL DE LA GRAVETAT	78
6.1 DESCRIPCIÓ DE L'EXPERIMENT	78
6.2 UTILLATGE	78
6.3 DIBUIX DEL MUNTATGE	78
6.4 PROCEDIMENT	79
6.5 RESULTATS OBTINGUTS, ANÀLISI I DISCUSSIÓ	79
7. DETERMINACIÓ EXPERIMENTAL DEL COEFICIENT AERODINÀMIC I LA FORÇA DE FRICCIÓ AERODINÀMICA	82
7.1 CAIGUDA DE L'HELICÒPTER.....	82
7.2 HIPÒTESIS	83
7.3 VARIACIÓ DE LA MASSA	84
7.3.1 Càlcul del coeficient aerodinàmic	84
7.3.2 Càlcul de la força de fricció aerodinàmica	85
7.3 VARIACIÓ DE L'ANGLE D'OBERTURA.....	86
7.3.1 Càlcul del coeficient aerodinàmic	86
7.3.2 Càlcul de la força de fricció aerodinàmica	87
7.4 VARIACIÓ DE LA LONGITUD DE LES ALES	88
7.4.1 Càlcul del coeficient aerodinàmic	88
7.4.2 Càlcul de la força de fricció aerodinàmica	89
8. INTERPRETACIÓ DEL MOVIMENT DE CAIGUDA AMB AUTOROTACIÓ DE L'HELICÒPTER DE PAPER I LES SÀMARES	90
9. CONCLUSIONS	92
10. AGRAÏMENTS.....	95
11. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES	96

1. INTRODUCCIÓ

Abstract

Over millions of years of evolution, certain plant species have developed dissemination strategies to increase their population: their fruits or seeds have “organs” that allow them generating enough lift to be able to stay in flight for a reasonable period of time while they are falling. The seeds that, when falling, execute an autorotation movement are called samaras and are, perhaps, the simplest, stable and efficient “aviators” that nature has created.

This research presents the study of the non-linear and unstationary aerodynamics associated with the autorotation movement exhibited by the samaras with a paper model (that we will refer to as Twister or paper helicopter).

The investigation is divided in three sections. The first one consists in a bibliographic study of the physical principles related to aerodynamics and the rotation dynamics.

Then, in the second part, of experimental aspect, we have designed and built different paper helicopters to find which characteristics observed in the samaras (we have elaborated an herbal to know which geometric features are the most differentiated between the various species) allow a maximum descent time. This research, has been developed through the cinematic analysis of the frames captured by a camera of video, thanks to the analysing programme Tracker.

Finally, we have intended to give an explanation at the helicopter movements using the physic laws studied in the first section.

Des de la infàntesa sempre he mostrat un gran interès i curiositat pel coneixement i la investigació, especialment per tot allò relacionat amb la ciència. És per això, que la realització del treball de recerca, em tenia motivada des del primer instant ja que, m’oferia l’oportunitat d’indagar sobre qualsevol tema. Tanmateix, mai no acabava de trobar un àmbit amb el qual centrar-me.

No obstant això, tot va canviar quan el juny del 2018, parlant davant l’institut amb els meus amics i amigues, una llavor amb una peculiar ala va caure autorotant davant dels nostres ulls. Fins llavors, mai m’havia fixat que a l’entrada de l’institut hi havia uns arbres amb unes llavors tant especials i captivadores.

Arran d’aquesta troballa, vaig començar a indagar quines eren aquestes llavors amb aquest moviment tant fascinant i quina funció tenia la seva estructura en el cicle biològic de l’espècie. Vaig descobrir que, després d’un transcurs de milions d’anys d’evolució, certes espècies vegetals havien desenvolupat estratègies de disseminació per augmentar la seva població. D’aquesta forma, van desenvolupar uns fruits, o llavors, que posseeixen uns òrgans que els permeten generar suficient força de sustentació com per a mantenir-se al vol durant un temps raonable mentre cauen i, així, traslladar-se el més lluny possible de la planta mare. Les llavors que, com la que jo vaig trobar, executen un moviment d’autorotació al caure s’anomenen sàmares i són, probablement, les aviadores més simples, estables i eficients que la naturalesa ha creat.

Quan vaig parlar-ne al meu professor de física, em va proposar fer l'estudi aerodinàmic d'aquests petits objectes voladors com a tema de recerca i, no vaig dubtar ni per un moment, en acceptar la proposta. Així va ser com vaig emprendre la difícil tasca d'estudiar i descobrir la complexa física que caracteritza el vol a petita escala.

Els primers estudis referents a aquestes llavors giratòries es remunten al començament de la dècada dels 50 i estaven orientats a quantificar els mecanismes que afavoreixen la dispersió d'aquesta classe de llavors. Posteriorment, van ser publicats nombrosos treballs en aquest camp amb l'objectiu d'estudiar les característiques morfològiques de les sàmares tals com: rugositat, forma de la superfície sustentadora, posició del centre de massa i gruix de la vora d'atac (Azuma i Yasuda, 1898)^[38]. Tot i això, el comportament aerodinàmic d'aquests mecanismes biològics és poc comprès i la majoria dels treballs que existeixen sobre el tema són experimentals.

Des de la segona meitat del segle XX, el fenomen de l'autorotació de les llavors (en particular les d'auró) és estudiat per nombrosos grups d'investigadors i especialistes en diferents àrees de la ciència per tal de, dissenyar i posteriorment construir micro-vehicles aeris (MAVs) inspirats en la biologia. El desenvolupament d'aquesta nova tecnologia contribuirà sense cap dubte a la solució de problemes de diferent caire: científics, comercials, de defensa i de seguretat; tant a nivell mundial com a nivell nacional.

Aquests estudis són realitzats mitjançant diversos procediments. Per exemple, Green (1980)^[56] va utilitzar tècniques basades en fotografies estroboscòpiques amb un gran nombre de mostres de set espècies de llavors autorotants diferents, amb l'objectiu de mesurar diversos paràmetres morfològics, cinemàtics, dinàmics i aerodinàmics. D'altra banda Lentink (2009)^[54] va utilitzar un model dinàmicament escalat d'una llavor d'auró per estudiar el flux tridimensional al voltant de la mateixa. En un mateix punt, Salcedo (2013)^[55] va emprar una tècnica basada en velocímetria digital d'imatges de partícules (*digital particle image velocimetry*, DPIV).

Com es dedueix, a partir de les recerques citades, un anàlisi precís de l'aerodinàmica de les llavors, si no es realitza a partir de la mateixa llavor autogiratòria, requereix de l'estudi d'un objecte que roti contínuament sustentat, només, per forces aerodinàmiques.

Amb l'objecte d'estudiar un fenomen que encara presenta molts interrogants, en aquest treball es presenta l'estudi del vol de les llavors



Figura 1 Individu tirant un helicòpter de paper [1]

autogiratòries mitjançant un model geomètricament senzill de paper (al que ens referirem com a helicòpter de paper o twister).

La recerca s'ha dividit en tres seccions. En la primera part s'ha fet una recerca bibliogràfica interdisciplinària, és a dir, des de dos àmbits: un de més biològic i un altre de caire més físic. Des de l'àmbit biològic, s'ha investigat l'evolució de les plantes i la forma de propagació de les seves llavors. Altrament, com a treball de camp, s'han trobat i recollit les espècies caracteritzades amb la llavor autogiratòria (que es poden trobar en l'ANNEX 2), per tal d'identificar les seves característiques estructurals fonamentals que condicionen la seva propagació pel medi aeri. Des del punt de vista de la física s'han estudiat els principis físics implicats amb la aerodinàmica i la dinàmica de rotació.

En la segona part, de caire experimental, s'han dissenyat i construït diferents helicòpters de paper per tal d'esbrinar quines característiques aconseguixen que el temps de descens sigui el màxim. Aquesta cerca s'ha realitzat a partir dels fotogrames enregistrats amb una càmera de vídeo, amb l'ajut del programa d'anàlisi lliure Tracker. Així mateix, a partir de les dades obtingudes sotmetent els helicòpters a canvis de variables, s'ha determinat el coeficient aerodinàmic dels helicòpters de paper

Finalment, s'ha intentat donar una explicació al moviment dels helicòpters utilitzant les lleis de la física.

2. OBJECTIUS

Aquest treball representa un nexa entre el llenguatge descriptiu usat pels biòlegs i el llenguatge predictiu utilitzat pels enginyers, és per això que s'ha decidit dividir aquesta secció en dos apartats. La primera d'elles té a veure amb l'aprenentatge dels mecanismes de vol biològics i la seva evolució, a part de l'enteniment dels principis i lleis físiques implicades en el vol dels objectes. D'altra banda, en el segon apartat, s'enfoca el treball des d'un punt de vista empíric, en el qual a partir de la informació consultada en l'anterior secció, s'estudia el vol de les llavors autogiratòries mitjançant un model de paper.

2.1 OBJECTIUS TEÒRICS I DE RECERCA

Com ja s'ha introduït, aquesta secció representa la recerca d'informació i base teòrica del projecte, tant biològica com física. A continuació podeu veure els objectius principals i els que en deriven:

1. Conèixer les lleis físiques implicades en el vol dels objectes (lleis i principis)
2. Conèixer el tipus de propagació de les llavors i, de forma més profunda reconèixer les espècies que propaguen les seves llavors a través del vent (anemocòria) i en concret les que ho fan de mitjançant l'autorotació.
 - a. Desenvolupar un herbari amb les espècies que es troben en la zona (ANNEX 1) i comparar-les entre si per tal de determinar quines variables es sotmetran sota estudi en els helicòpters de paper.

2.2 OBJECTIUS PRÀCTICS I D'EXPERIMENTACIÓ

A continuació es presenten els principals objectius experimentals, encara que s'ha de dir que per tal de resoldre'ls se'n deriven de molts altres (com ara els que es troben en l'anterior secció).

3. Determinar la geometria que ha de tenir un helicòpter de paper de massa m perquè el seu temps de descens sigui el màxim possible.

Per tal d'esbrinar-ho caldrà mesurar experimentalment el temps de descens mesurant la velocitat terminal, de forma que com més petita sigui la velocitat terminal, major serà el temps de descens. Per tant, cal:

4. Determinar la geometria de l'helicòpter de paper perquè tingui una velocitat terminal mínima

A partir de les dades obtingudes sotmetent els helicòpters a canvis de variables (ANNEX 2), es pretén determinar el coeficient aerodinàmic d'un tipus d'helicòpter de paper, així doncs, un dels altres objectius és:

5. Determinar experimentalment el coeficient aerodinàmic dels helicòpters de paper estudiats.

D'aquesta forma, amb l'anterior objectiu es proposa:

6. Determinar experimentalment la densitat de l'aire.
7. Determinar experimentalment la gravetat.

D'altra banda també es procurarà donar unes raons físiques al vol dels helicòpters de paper:

8. Interpretar el moviment de caiguda amb autorotació de l'helicòpter de paper i les sàmares.

3. MARC TEÒRIC

3.1 LLEIS FÍSQUES IMPLICADES EN EL VOL DELS OBJECTES

3.1.1 Aerodinàmica

L'aerodinàmica és la branca de la mecànica de fluids que estudia les accions que apareixen sobre els cossos sòlids quan existeix un moviment relatiu entre aquests i el fluid que els banya, sent aquest últim un gas i no un líquid. En aquest últim cas, es parlaria de la hidrodinàmica. El problema aerodinàmic consisteix a determinar o estimar les forces que realitza el fluid sobre el cos.

En la solució d'un problema aerodinàmic normalment és necessari el càlcul de diverses propietats del fluid, com poden ser la velocitat, la pressió, la densitat i la temperatura, en funció de la posició del punt estudiat i el temps.^[2]

Existeixen certes lleis de l'aerodinàmica aplicables a qualsevol objecte movent-se a través de l'aire, que expliquen el vol dels objectes més pesats que l'aire. Quan s'estudia el vol és el mateix considerar que és l'objecte el que es mou a través de l'aire, com que aquest objecte estigui immòbil i és l'aire el que es mou (túnels de vent).^[3]

3.1.2 Principi de Bernoulli

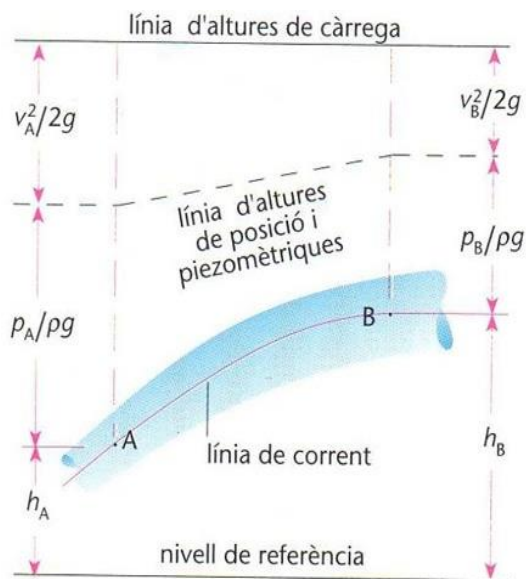


Figura 2 Representació del principi de Bernoulli com a constància de l'altura de càrrega, a partir de l'altura de posició h , l'altura piezomètrica $P/\rho g$ (P , pressió mesurada amb un manòmetre; ρ , densitat del fluid; g , acceleració...^[4]

El principi o teorema de Bernoulli, va ser formulat i publicat el 1738 (al *Hydrodynamica*^[5]) pel matemàtic i físic suís Daniel Bernoulli. El teorema afirma que l'energia total d'un sistema de fluids amb flux uniforme roman constant al llarg de la trajectòria de flux. Pot demostrar-se que, com a conseqüència d'això, l'augment de velocitat del fluid s'ha de veure compensat per una disminució de la seva pressió.

El principi de Bernoulli es pot aplicar per diferents tipus de flux de fluids, i en resulta el que es coneix quotidianament com a equació de Bernoulli. De fet, hi ha diferents tipus d'aquesta equació segons els diferents tipus de flux. La seva forma més simple i comuna és vàlida per fluids incompressibles (per exemple, la majoria de líquids) i també per fluids compressibles (com per exemple gasos).

3.1.2.1 Equació de Bernoulli

És un principi físic que implica la disminució de la pressió d'un fluid (líquid o gas) en moviment quan augmenta la seva velocitat, és a dir, en un fluid en moviment, la suma de pressió i la velocitat en un punt qualsevol es manté constant: $p + v = k$.

Perquè es mantingui aquesta constant (k), si una partícula augmenta la seva velocitat (v) haurà de disminuir la seva pressió (p), i a la inversa (vegeu la Figura 3 com a exemplificació).

En resum, que si les partícules d'aire augmenten la seva velocitat serà a costa de disminuir la seva pressió i al revés, o el que és el mateix: per a qualsevol parcel·la d'aire, alta velocitat implica baixa pressió i baixa velocitat suposa alta pressió. Això passa a velocitats inferiors a la del so, ja que a partir d'aquesta ocorren altres fenòmens que afecten de forma important a aquesta relació.



Figura 4 Relació de pressió i velocitat

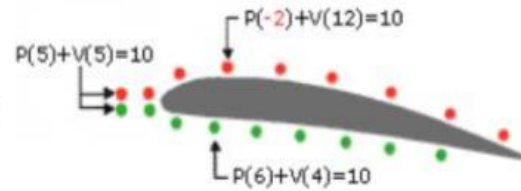


Figura 3 Representació del teorema de Bernoulli en una ala d'avió [3]

L'equació de Bernoulli es pot expressar com una derivació de la llei de la conservació de l'energia, fent referència a un corrent d'un fluid de densitat (d), que es mou entre dos punts, a unes altures determinades (h) on té una determinada velocitat (v) i pressió (p). S'expressa de la forma següent:

$$p_A + \frac{1}{2}dv_A^2 + dgh_A = p_B + \frac{1}{2}dv_B^2 + dgh_B$$

Anomenant-se el factor (p) pressió estàtica i el factor ($\frac{1}{2}dv^2$) pressió dinàmica. L'aire està dotat de pressió (p), aquest aire té una densitat (d) que flueix a una determinada velocitat (v), la qual conté una energia cinètica com qualsevol altre objecte en moviment ($\frac{1}{2}dv^2$ = energia cinètica). Segons la llei de la conservació de l'energia, la suma d'ambdues és constant.

3.1.2.2 Aplicacions del teorema de Bernoulli

El teorema de Bernoulli té moltes i diverses aplicacions en el món de la física, com ara: la pressió hidrostàtica, el Teorema de Torricelli, la sortida d'aigua d'una mànega, l'efecte d'una pilota (mentre es troba a l'aire una vegada llançada), el Tub de pitot... Tanmateix, ara només s'explicaran l'efecte venturi i l'exemplificació de la sustentació de l'ala d'un avió.^[6]

3.1.2.2.1 Efecte venturi

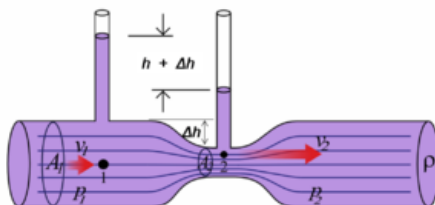


Figura 5 Esquema de l'efecte venturi [7]

L'efecte Venturi, també conegut com a tub de Venturi, es produeix quan un fluid en moviment dins d'un conducte tancat disminueix la seva pressió en augmentar la velocitat després de passar per una zona de secció menor. Si en aquest punt del conducte s'introdueix l'extrem d'un altre conducte, es produeix una aspiració del fluid contingut en aquest segon conducte.

Aquest efecte, demostrat el 1797, rep el seu nom del físic italià Giovanni Battista Venturi (s. XVIII-XIX).

L'efecte Venturi s'explica pel Principi de Bernoulli i el principi de continuïtat de massa. Si el cabal d'un fluid és constant però la secció disminueix, necessàriament la velocitat augmenta. Pel teorema de l'energia si l'energia cinètica augmenta, l'energia determinada pel valor de la pressió disminueix forçosament.^[7]

3.1.2.2.1 Sustentació de l'ala d'un avió

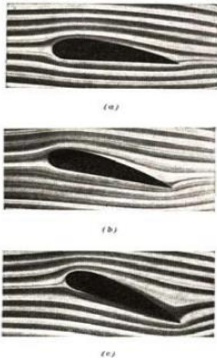


Figura 6 Ala d'avió en període de vol [6]

Explicat d'una manera molt elemental, es pot dir que el perfil de l'ala d'un avió és de tal forma que el seu perímetre és més llarg a la part superior que a la part inferior. Per això a la part superior la velocitat de l'aire, quan l'avió avança, és més gran que a la part inferior i d'acord amb l'equació de Bernoulli hi disminueix la pressió. Aquesta diferència de pressions dona com a resultat una força vertical que és la que equilibra el pes de l'avió i fa que s'aganti en l'aire. Ara bé, si es va augmentant l'angle d'atac, arriba un moment que a la part superior i a darrera de l'ala es comencen a formar remolins d'aire que fan que aquesta diferència de pressions ja no es mantingui i que l'avió entri en pèrdua.

Quan es coneixen les velocitats de l'aire per sobre i sota l'ala, les forces de sustentació es poden calcular (fins a una bona aproximació) usant les equacions de Bernoulli, establertes per Daniel Bernoulli un segle abans que les primeres ales fabricades pels humans servissin pel propòsit de volar. El principi de Bernoulli, però, no explica per què l'aire flueix més ràpidament per sobre l'ala que no per sota: per entendre això cal aplicar el concepte de circulació, la condició de Kutta i el teorema de Kutta-Joukowski.



Figura 7 Condensació visible sobre la superfície superior d'una ala causada pel descens de temperatura acompanyat d'un descens en la pressió, ambdós deguts a l'acceleració de l'aire

3.1.3 Efecte Coandă



Figura 8 efecte Coandă demostrat amb una cullera i un raig d'aigua [8]

L'efecte Coandă és el fenomen físic de la mecànica de fluids en el qual un corrent de fluid (gasós o líquid) tendeix a ser atret per una superfície veïna a la seva trajectòria. Amb unes altres paraules, aquest efecte explica la curvatura dels fluids a l'entrar en contacte amb un cos sòlid. El terme va ser emès per Albert Metral en honor a l'enginyer aeronàutic romanès Henri Coandă, que va descobrir l'efecte en el seu prototip d'un avió de reacció.

Una bona manera d'explicar en què consisteix l'efecte Coandă és amb un exemple: si sobre una superfície corba, com per exemple un cilindre, s'hi aboca quelcom sòlid, l'element abocat rebotarà en direcció oposada al cilindre, i aquest, pel principi d'acció-reacció, tendirà a anar en direcció oposada a la que ha pres l'element sòlid. En canvi, si es repeteix aquesta experiència amb un líquid, la seva viscositat el farà tendir a enganxar-se a la superfície corba del cilindre.

L'efecte Coandă és una de les claus de la aerodinàmica moderna, essencial pel desenvolupament dels avions i d'altres tipus d'automòbils.^[9]

3.2 LLEIS FÍSQUES DE LA DINÀMICA DE ROTACIÓ

3.2.1 Centre de masses

El centre de masses^[10] representa el punt que s'ha d'estudiar quan, en lloc d'una partícula puntual, es té un cos real, format per diverses d'elles.

Quan un cos es troba en moviment, per exemple, en llançar un llapis a l'aire, totes les seves partícules es mouen alhora, encara que amb diferents trajectòries. Per caracteritzar la translació del llapis en el seu conjunt, no obstant això, n'hi ha prou amb estudiar què passa en un sol punt del mateix: el seu centre de masses. Aquest serà el que determini la seva velocitat, la seva trajectòria, etc. Es podria dir que el centre de masses és el centre de simetria de distribució d'un sistema de partícules.



Figura 9 Equilibrista Philippe petit. Per passar per la corda amb un bastó, l'equilibrista ha de trobar el punt d'equilibri de la mateixa, és a dir, el seu centre de masses [11]

3.2.1.1 Diferència amb el centre de gravetat i el centre de masses

El centre de gravetat d'un cos és un altre punt que s'acostuma a utilitzar per estudiar el comportament d'un sistema de partícules. En concret, és el punt al que s'aplica el vector pes del sistema, que és la resultant del vector pes de cadascuna de les partícules. Perquè existeixi centre de gravetat, ha d'existir un camp gravitatori. Sinó, només existeix centre de masses.

En general, el centre de gravetat no coincideix amb el centre de masses perquè el camp gravitatori no és uniforme. No obstant això, en la majoria dels problemes, es pot suposar el camp gravitatori constant i, per tant, els dos punts coincideixen.

3.2.2 Els sòlids rígids

Un sòlid rígid és un cos format per diverses partícules puntuals que guarden distàncies constants entre si (inclús sota la acció de forces exteriors). És un model que s'usa en dinàmica per estudiar els cossos en aquells casos que no es pot suposar que tota la seva massa es concentra en un únic punt. Val a dir que el sòlid rígid és un cas ideal, és a dir, es tracta d'un model, una abstracció de la realitat que resulta útil per estudiar certs tipus de cossos.

Quan s'aplica una força sobre el sòlid rígid, aquest es mou, conservant la seva forma. Qualsevol moviment del sòlid rígid es pot descompondre en dues classes: translació i rotació.

- **Translació:** Es produeix quan totes les partícules del cos descriuen trajectòries paral·leles. Quan apliques una força al centre de masses d'un cos, es produeix un moviment de translació pura.
- **Rotació:** Existeix un eix de rotació, real o imaginari, al voltant del qual les partícules descriuen circumferències. Els efectes d'una força sobre la rotació d'un cos estan associats als moments que genera aquesta força en el cos

A la natura es poden trobar els dos tipus de moviment que, en la majoria dels casos, es produeixen de manera combinada. En tal cas diem que poden ser:

- **Independents:** No hi ha relació entre la rotació i la translació del cos. Per exemple la Terra en el seu recorregut al voltant del Sol.
- **Acoblats:** La velocitat de translació i rotació es troben relacionades. Per exemple un cilindre rodant en un pla inclinat.

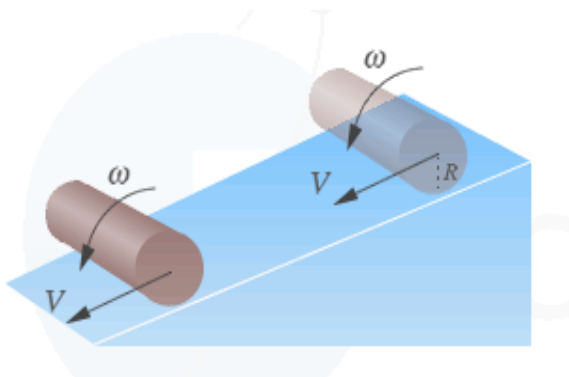


Figura 11 Al contrari que el moviment de la Terra, la velocitat de translació del cilindre baixant per un pla inclinat està relacionada amb la seva velocitat angular [10]

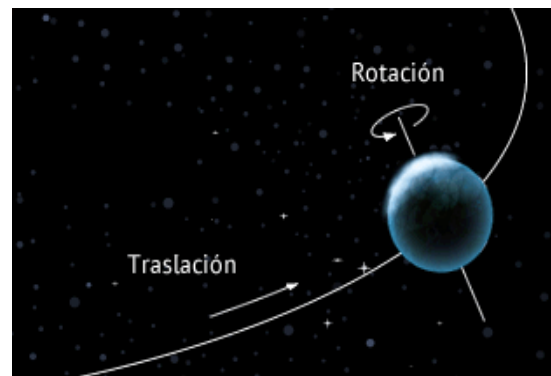


Figura 10 La Terra realitza un moviment de translació respecte al Sol que és independent del seu moviment de rotació sobre el seu eix [10]

3.2.3 Rotació del sòlid rígid

Un sòlid rígid realitza un moviment de rotació quan les seves partícules descriuen circumferències al voltant d'una recta anomenada eix de rotació. Per caracteritzar l'estat de rotació d'un cos s'utilitza el seu moment angular. Es sap que per canviar el moment angular, és a dir, l'estat de rotació del cos, és necessari que actuï una força que generi un moment respecte a un punt o eix de rotació.

En aquest apartat es presenta aquest moment de força. A més s'introdueix un nou concepte: el parell de forces, que permet produir en els cossos un moviment de rotació pura (això és, sense translació).

3.2.3.1 Moment de força

Per caracteritzar la capacitat d'una força per produir la rotació d'un cos, a partir dels conceptes de distància i direcció, es presenta a continuació el moment de força.

El **moment de força**, també conegut com a moment dinàmic, o, simplement, moment és el moment del vector força, (\vec{F}) , respecte al punt (\vec{M}_0) o eix (M_e) considerat. La seva unitat de mesura en el Sistema Internacional (S.I.) és el newton per metre ($N \cdot m$). La seva expressió:

- Respecte al punt O: $\vec{M}_O = \vec{r} \cdot \vec{F}$
- Respecte a l'eix e: $M_e = \vec{M}_O \cdot \vec{u}_e$



Figura 12 Moment de força respecte un punt (esquerra) i un eix (dreta) [10]

El moment d'una força permet conèixer la capacitat d'aquesta força per canviar l'estat de rotació del cos al voltant d'un eix de rotació que passi per aquest punt. Per canviar el seu estat, el moment, o algun dels seus components, ha d'actuar en la direcció de l'eix de rotació.

3.2.3.2 Parell de forces

Un parell de forces és un sistema de dues forces paral·leles d'igual valor (mòdul) però sentit contrari. Aquestes actuen sobre el mateix cos però sobre línies d'acció diferents.

En definitiva, si sobre un sòlid rígid actua un parell de forces, apareix un moviment de rotació pura.

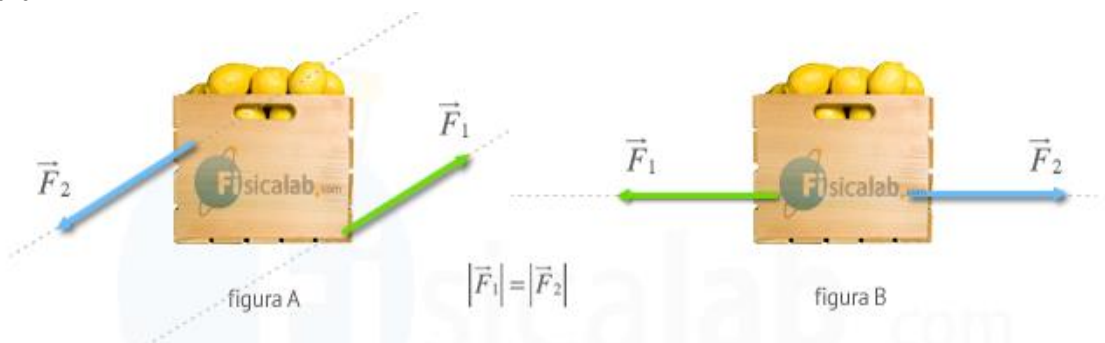


Figura 13 Encara que en ambdós casos les forces tenen el mateix mòdul, les de la figura A actuen sobre línies d'acció diferents i, per tant, provocaran que el cos roti. En canvi, a la figura B el cos romandrà en repòs ja que ambdós forces actuen sobre la mateixa línia d'acció [10]

3.2.4 Moment angular

El moment angular és una magnitud vectorial que s'utilitza a física per caracteritzar l'estat de rotació dels cossos.

3.2.4.1 Moment angular d'un punt material

Es defineix el moment angular o cinètic d'una partícula material respecte a un punt O com el moment de la seva quantitat de moviment, és a dir, el producte vectorial del seu vector de posició pel seu moment lineal:

$$\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{p} = \vec{r} \cdot (m \cdot \vec{v})$$

On:

- \vec{L} = **Moment angular del sòlid rígid**. La seva unitat de mesura en el Sistema Internacional (S.I.) és el $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$.
- \vec{r} = **Vector de posició** del cos respecte el punt O.

- \vec{p} = **Quantitat de moviment del cos**. També es coneix com a moment lineal. És el producte de la massa del cos (m), mesura en el Sistema Internacional (S.I.) en kg, per la seva velocitat (\vec{v}), mesura en m/s. La seva unitat de mesura en el Sistema Internacional (S.I.) és el $kg \cdot m \cdot s^{-1}$.

El moment angular d'un punt material es defineix a partir d'un vector de posició i una partícula puntual en moviment, això és, amb certa velocitat instantània. Remarcar que no és una magnitud pròpia del cos, sinó que depèn del punt de referència que s'esculli. El seu significat físic té a veure amb la rotació: El moment angular caracteritza l'estat de rotació d'un punt material, de la mateixa manera que el moment lineal caracteritza l'estat de translació lineal. Per entendre bé aquesta idea, es presenta una nova magnitud: el moment d'inèrcia.

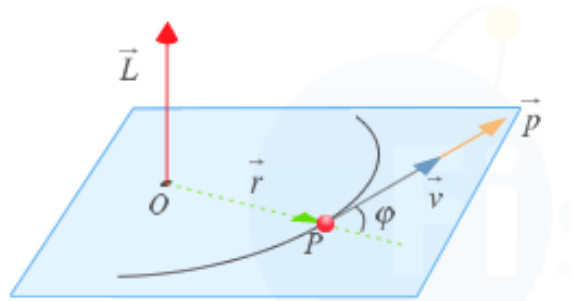


Figura 14 El moment angular d'una partícula L respecte a O és perpendicular al pla format per r i p [10]

3.2.4.2 Moment d'inèrcia

El podem definir pel cas concret dels moviments circulars. Es defineix el moment d'inèrcia I d'una massa puntual com el producte de la massa d'aquest cos per la seva distància a l'eix de gir. La seva expressió ve donada per:

$$I = m \cdot r^2$$

On:

- I = **Moment d'inèrcia**. La seva unitat de mesura en el Sistema Internacional (S.I.) és el $kg \cdot m^2$.
- m = **Massa del cos**. La seva unitat en el sistema internacional (S.I.) és el kg.
- r = **Distància del centre de gir**. També es pot dir que és el mòdul del vector de posició del cos respecte al centre de gir. La seva unitat de mesura en el Sistema Internacional (S.I.) és el metre.

Es pot relacionar el moment d'inèrcia d'una partícula puntual en moviment circular amb el seu moment angular. Recordar que el vector de posició d'un cos que gira en moviment circular respecte al centre de gir d'aquest moviment i el vector velocitat formen un angle de 90° . Llavors, a partir de l'expressió del moment angular es pot escriure:

$$L = r \cdot p \cdot \sin 90 = r \cdot p = r \cdot m \cdot v = r \cdot m \cdot (w \cdot r) = m \cdot r^2 \cdot w$$

$$I = m \cdot r^2 \rightarrow L = I \cdot w$$

Quedant amb notació vectorial, la següent equació:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{w}$$

On s'ha tingut en compte que la velocitat angular es considera un vector axial que és perpendicular al pla de gir.

3.2.4.3 Moment angular d'un sòlid rígida

El **moment angular d'un sòlid rígida** (anàleg al moment d'inèrcia) caracteritza el seu estat de rotació. La seva expressió ve donada per:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

On:

- \vec{L} = **Moment angular del sòlid rígida**. La seva unitat de mesura en el Sistema Internacional (S.I.) és el $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$. Ens restringim al cas que l'eix de referència sigui un eix principal.
- I = **Moment d'inèrcia del sòlid**. Representa un factor d'oposició als canvis en l'estat de rotació del cos de forma similar a com la massa s'oposa als canvis en l'estat de translació. Depèn de la massa del sòlid i de la distribució d'aquesta massa pel que fa a l'eix de rotació triat. Encara que en general existeixen infinits moments d'inèrcia possibles, tant com a eixos de rotació es puguin triar, la seva expressió, per al cas del sòlid rígida discret, és:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \quad \rightarrow \quad I = m \cdot r^2$$

La seva unitat de mesura en el Sistema Internacional (S.I.) és el $kg \cdot m^2$.

- $\vec{\omega}$ = **Velocitat angular del sòlid rígida**. És un vector axial (s'assigna la direcció y per conveni). La seva direcció és perpendicular al plànol de gir i el seu sentit ve donat per la regla de la mà dreta. La seva unitat de mesura al Sistema Internacional (S.I.) és el radiant per segon (rad/s).

Per arribar a l'expressió anterior del moment angular s'ha considerat com a referència l'eix de gir d'un disc. En general, l'elecció d'un eix adequat té importància per al càlcul del moment angular.

En els moviments circulars, com més gran sigui el moment inercial I , més resistència hi ha a modificar l'estat de rotació (el moment angular).

El moment angular \vec{L} varia quan sobre ell actua un moment de força \vec{M} . Per tant, el moment angular d'un sòlid rígida es conserva quan el moment de forces exteriors que actuen sobre el sòlid és nul: $\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = constant$. En cas que sigui una massa puntual el moment angular es conserva quan el moment de les forces que actuen sobre ell és nul.

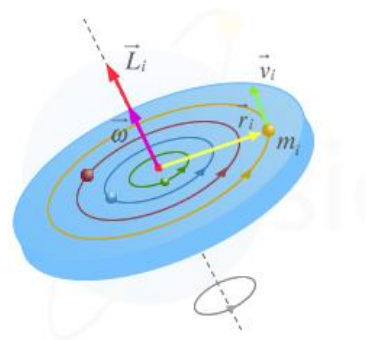


Figura 15 Per calcular el moment angular d'un sòlid rígida es sumen els moments angulars de cada partícula que l'integren [10]

Posem com a exemple, per entendre el moment angular, una patinadora que mentre gira recull els seus braços. En recollir els seus braços la distribució de masses respecte a l'eix varia: tota la massa es concentra més prop del mateix amb lo qual el moment d'inèrcia disminueix. En el moviment de plegar els braços no són necessaris moments de força, per la qual cosa el moment angular roman constant. Observa què succeeix llavors:

$$(I_1 \cdot \omega_1)_{abans} = (I_2 \cdot \omega_2)_{després}$$

Això significa que, atès que I_2 és menor que I_1 , la velocitat angular ω_2 ha de ser major que ω_1 . És a dir, quan el patinador plega els seus braços, la seva velocitat angular augmenta.

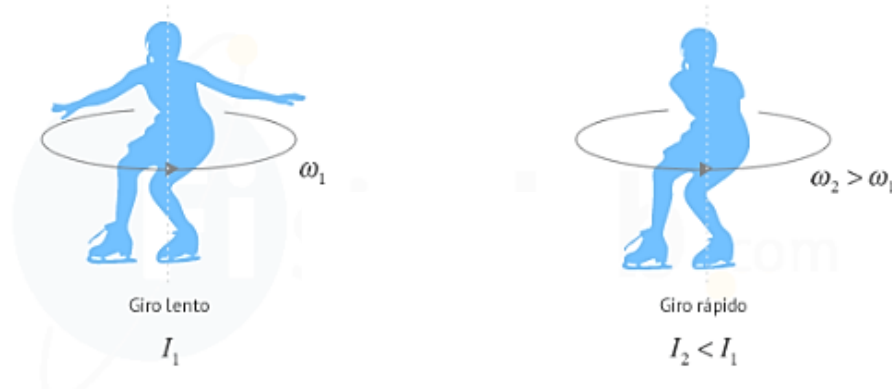


Figura 16 Exemple del moment angular amb una patinadora [10]

3.2.5 Segona llei de Newton aplicada a la dinàmica de la rotació

Les lleis de Newton descriuen com es relacionen les forces que actuen sobre un objecte amb el moviment que aquest experimenta. Quan en comptes d'una partícula tenim un sòlid rígido, les forces poden provocar o modificar, addicionalment al de translació, un altre tipus de moviment: el de rotació.

En aquest apartat es mostra la deducció de l'equació fonamental que regeix la dinàmica de rotació dels cossos.

3.2.5.1 Equació fonamental de la dinàmica de rotació

Amb l'estudi del moment lineal s'observa que la variació instantània del moment lineal és igual a la força que actua sobre el cos, és a dir:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

L'expressió anterior constituïa la segona llei de Newton. Es pot fer un desenvolupament similar amb el moment angular per arribar a una equació anàloga (l'equació fonamental de la dinàmica de rotació):

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(I \cdot \vec{\omega})}{dt} = \frac{dI}{dt} \cdot \vec{\omega} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \cdot I = I \cdot \vec{\alpha}$$

$$\frac{dI}{dt} = 0$$

L'equació fonamental de la dinàmica de rotació estableix que l'acceleració angular que apareix en un sòlid rígido és proporcional al moment de força que actua sobre ell. La seva expressió és:

$$\vec{M} = I \cdot \vec{\alpha}$$

On:

- \vec{M} = És el moment de força rebut pel sòlid rígido. La seva unitat de mesura en el Sistema Internacional (S.I.) és el newton per metre ($N \cdot m$)

- $I = \text{Moment d'inèrcia del sòlid}$. Representa un factor d'oposició als canvis en l'estat de rotació del cos de forma similar a com la massa s'oposa als canvis en l'estat de translació. La seva unitat de mesura en el Sistema Internacional (S.I.) és el $kg \cdot m^2$.
- $\vec{\alpha} = \text{Acceleració angular}$. Representa la variació per unitat de temps de la velocitat angular, amb la qual cosa $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$. La seva unitat de mesura en el Sistema Internacional (S.I.) és el rad/s^2 .

Cal recordar que el moment de força no és més que el moment del vector força respecte a l'origen o eix considerat.

Quan el moment d'una força que actua sobre un cos en un punt és diferent de zero, els punts del sòlid realitzaran una rotació sobre l'eix de gir. La velocitat de tots els punts és la mateixa, $\vec{\omega}$. Mentre actuï la força el moviment circular serà accelerat, amb acceleració angular $\vec{\alpha}$.

3.3 LLAVORS

La llavor, sement o grana és l'òrgan que es desenvolupa a partir del primordi seminal dins l'ovari de la flor, i que representa l'estructura de supervivència de les espècies vegetals^[12]. També es podria definir com una menuda planta embrionària, recoberta per una protecció, i que normalment inclou algun nutrient emmagatzemat

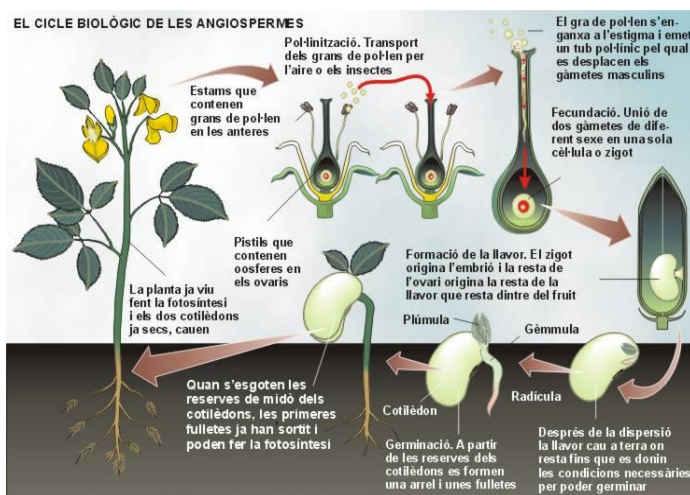


Figura 17 Cicle biològic de les angiospermes [18]

que el primordi seminal fecundat un cop és madur i està preparat per separar-se de la planta mare.

La llavor té com a funció assegurar que la formació de l'embrió es doni en condicions molt favorables, ja que el seu desenvolupament té lloc estant unit a la planta mare, que li proporciona aliment i una bona protecció. Si els teixits nutricis són abundants i l'embrió entra en estat de vida latent (com és el cas més típic), la llavor, un cop després de la planta, pot resistir períodes desfavorables més o menys llargs, tot mantenint la capacitat d'entrar en activitat, i un cop germina, facilita el bon desenvolupament inicial de la plàntula naixent.^[13]

A més, la llavor és, en principi, l'òrgan dispersant dels espermatòfits, en substitució de les petites espores dels pteridòfits isosporis i de les megàspores, ja força més grosses, dels pteridòfits heterosporis. Però al ser molt més pesada que una espora no és tan fàcil de dispersar o, si més no, a priori, no pot recórrer tan fàcilment llargues distàncies.

La mida de les llavors és força variable. Oscil·la entre les que pesen alguns quilograms, com a l'arecàcia *Lodoicea*, que pesa uns 23 kg, fins a aquelles que solament pesen unes mil·lèsimes de mil·ligram, com ocorre en espècies d'orquidàcies i orobancàcies.



Figura 18 Individu agafant un coco de mar (*Lodoicea maldivica*) [14]

3.3.1 Història evolutiva de les plantes

L'origen de les plantes terrestres és un tema extens i que encara s'estudia. Les milers d'espècies conegudes són tant sols una part del que ha existit, ja que durant el transcurs de la vida al planeta s'han produït noves espècies i s'han extingit unes altres.^[15] La teoria més acceptada és que les plantes terrestres van evolucionar a partir d'algues verdes fa uns 510-630 milions d'anys.

Al nostre planeta la vida va començar als oceans fa uns quatre mil milions d'anys quan es van formar les primeres molècules amb les propietats que se li assignen a la matèria viva¹. Quan entre aquestes molècules va aparèixer la clorofil·la², es va tornar possible aprofitar l'energia de la radiació solar per formar sucres a partir de l'aigua i del diòxid de carboni de l'atmosfera mitjançant el procés anomenat fotosíntesi, durant el qual també s'allibera oxigen a l'atmosfera³. Els sucres van permetre que les primeres cèl·lules vegetals engrossissin la seva membrana i acumulessin reserves alimentàries. Aquestes cèl·lules van ser les antecessores de les algues i de totes les plantes verdes⁴. L'oxigen generat per la fotosíntesi va actuar com a verí per als éssers més primitius⁵ que cobrien les seves necessitats d'energia mitjançant la fermentació (procés que transcorre en absència d'oxigen). Per sobreviure es van refugiar en mitjans no oxigenats, com el llot del fons de rius, llacs i mars, on encara romanen. Tan sols les algues verdes posseeixen clorofil·la, que és molt més estable que els pigments de les algues brunes i vermelles. Així doncs, les algues marrons i les vermelles van sobreviure restringint-se a mitjans als quals no arriba la radiació solar i, únicament les algues verdes van poder generar descendents que van donar lloc als ancestres de totes les plantes terrestres, tal i com suggereix un estudi que va sortir a la llum el 2001. El professor Russell L. Chapman va indicar que els primers organismes fotosintètics que



Figura 21 Alga bruna (classe Phaeophyceae); *Fucus distichus* de l'oceà Pacífic [21]



Figura 21 Alga vermella (Classe Rhodophyta); *Gracilaria* [22]



Figura 21 Alga verda (Classe Chlorophyceae); *Ulva lactuca* (enciam de mar) [23]

¹ veure '[L'origen de la vida](#), Ciència Avui, Vol. 3 N° 17: 58-64, 1992

² alguns organismes ja efectuaven un procés de fotosíntesi; els cianobacteris i altres tipus de bacteris van conformar alguns dels primers éssers fotosintètics i cap a l'era Paleoprotozoica, fa 2,500-1,600 milions d'anys enrere, els cianobacteris o algues verd-blaves, de cèl·lules procariotes, ja generaven molècules d'oxigen mitjançant una fotosíntesi.

³ veure '[Aigua, carboni, llum i vida](#), Ciència Avui, Vol. 5 N° 27: 41-55, 1994

⁴ És possible que les primeres cèl·lules eucariotes de les plantes verdes evolucionessin de les procariotes (bacteris). L'anomenada "teoria endosimbiòtica" o simbiogènesi proposa que els bacteris que realitzaven fotosíntesi van ser consumits mitjançant endocitosi per cèl·lules eucariotes i d'aquesta manera es van originar les primeres cèl·lules vegetals. La veritat és que els fòssils de les cèl·lules eucariotes més antigues guarden molta semblança amb les algues verdes.

⁵ S'ha d'afegir que va originar la capa d'ozó que va permetre la evolució cap a éssers més complexos

van conquerir terra van poder haver-se originat d'algues d'aigua dolça que es van adaptar al terreny i van evolucionar fins a diversificar-se.



Figura 22 *Chara Globularis* (de la classe de les Charophyceae) [20]

Si les plantes terrestres deriven d'un grup d'algues verdes, les primeres van arribar al món en algun punt del període Ordovícic, durant l'era Paleozoica. L'ancestre directe podria haver viscut a la vora dels cossos d'aigua estacionals. Avui es sap que els parents més propers a les plantes de la terra són les algues verdes d'aigua dolça que pertanyen a la Classe *Charophyceae*.

Les plantes més antigues es reproduïen per mitjà d'espores. Encara no existia la reproducció sexual, és a dir, la unió de la cèl·lula sexual femenina amb la masculina. S'ha de dir que les formes ancestrals de plantes eren organismes relativament senzills.

Els briòfits, plantes no vasculars entre les quals es troben les molles, corresponen al llinatge més antic de les plantes terrestres. No produeixen llavors ni flors i es reproduïen mitjançant espores. Les molles van ser les primeres plantes amb fulles^[16], a les quals l'evidència fòssil els assigna un origen molt antic. Les molles no van evolucionar, no es van adaptar a la vida aèria i si bé posseeixen lignina (component essencial de la fusta que li proporciona la seva rigidesa), no van saber utilitzar-la. Les molles, al costat de les coníferes i les plantes amb flors, constitueixen la primera civilització vegetal que va abandonar el mitjà marí per conquerir la terra. Les primeres plantes que 'van aprendre' a aprofitar la fusta van ser les falgueres, que van constituir així la primera gran civilització vegetal adaptada a la vida terrestre.

Fa quatre-cents milions d'anys, després d'una terrible sequera⁶ que va assolir la terra, van sorgir les primeres plantes erectes com la *Rhynia*. Les primeres plantes proveïdes de fusta van proliferar a l'Era Primària inicialment com a herbes i després com a arbres cada vegada més grans, que van formar els enormes boscos del Carbonífer, desapareguts en l'actualitat transformats als jaciments d'hulla. Aquests jaciments indiquen l'existència d'immensos boscos pantanosos, constituïts per equisets gegants (dels quals actualment solament queden algunes espècies), falgueres amb llavors i arbres amb òvuls primitius que, sorgint dels pantans, formaven un estrany paisatge vegetal. Falgueres, equisets i selaginelles (plantes amb notòria separació de sexes) formen part de tres grans línies vegetals que des del començament de l'Era Primària han evolucionat paral·lelament. Aquesta evolució va concloure amb el desenvolupament, fa uns 300-400 milions d'anys de l'òvul, un nou òrgan propi de les plantes amb llavor. La **llavor** és un òvul fecundat, on es desenvolupa



Figura 23 Secció fòssil d'un tall aeri de *Rhynia Gwynne-vaughanii* [24]

⁶ Al període Devonià es va produir una radiació adaptativa transcendental. Això significa que els organismes es van diversificar a un ritme ràpid amb una gran varietat de formes. Per tant, fa aproximadament 400 milions d'anys van començar a sorgir diversos tipus de plantes.

l'embrió, aquest roman en un estat de vida latent; acumula reserves d'aliments per reprendre el seu creixement al moment de la seva germinació.



Figura 24 *Ginkgo biloba* a la tardor [25]

S'accepta que la formació de metabòlits secundaris, o de productes del metabolisme especial, com a principal font de substàncies amb efectes biològics, es va produir a partir de l'aparició de les plantes amb òvuls i que la seva màxima expressió es va aconseguir amb les Angiospermes (plantes amb flors), l'aparició de les quals en el curs de l'evolució és molt posterior a la de les plantes amb òvuls.

Les primeres plantes proveïdes d'òvuls han desaparegut deixant com a rastre solament alguns fòssils. Únicament el *Ginkgo*, arbre venerable, veritable fòssil vivent, proporciona alguna idea del que van ser els primers òvuls. El *Ginkgo* és el més antic dels arbres; existeixen dues classes d'individus: mascles i femelles, diferenciables pel seu aspecte diferent. Malgrat la seva característica de fòssil vivent perdut en l'evolució, *Ginkgo biloba* L. és capaç d'adaptar-se ràpidament al medi.

Les falgueres també són fòssils vivents conservats fins als nostres dies i que donen testimoni de com era la vegetació a l'Era Primària (els *Ginkgos* són fòssils supervivents dels boscos de l'Era Secundària, amb òvuls, sense llavors i sense fruits). Les primeres plantes amb llavors van ser les Coníferes (pins, avets, sequoies, cedres, xiprers, araucàries, etc.) que van aparèixer en l'Era Secundària centenars de milers de segles després iniciant una nova gran civilització vegetal. Després d'una expansió inicial, les Coníferes van endarrerir per efecte de la pressió evolutiva de l'última gran civilització vegetal constituïda per les plantes amb flors, les quals posseeixen ovari i produeixen fruits. Aquestes es van expandir amb una embranzida irresistible que va començar fa cent milions d'anys i que no ha cessat d'augmentar establint noves relacions, en benefici mutu, entre els animals i les plantes.⁷

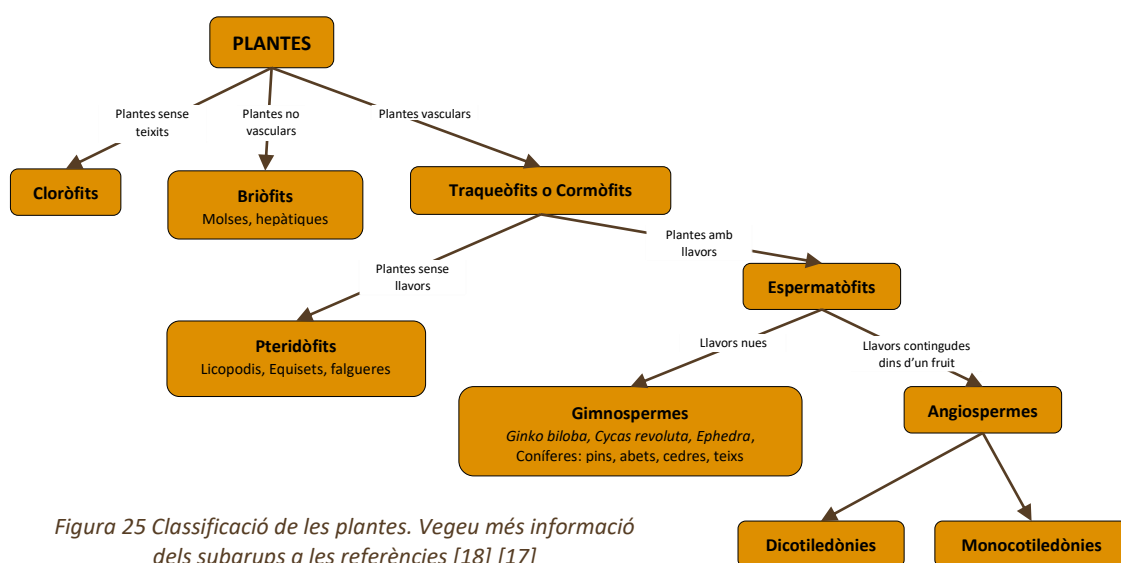


Figura 25 Classificació de les plantes. Vegeu més informació dels subgrups a les referències [18] [17]

⁷ Lobato Cameselle, R i Cidrás Ferradás, J. expliquen l'evolució vegetal amb la comparació dels registres fòssils i els canvis ambientals (associats a les plaques tectòniques) en el seu estudi *Evolució vegetal* [26]

3.3.2 Origen de les llavors

Les llavors constitueixen una de les innovacions més importants de les plantes vasculars que van sorgir durant el curs de l'evolució. Són un dels factors responsables del domini actual de les plantes superiors en la flora del nostre planeta avui dia. Quan s'examina una llavor immadura, o sigui un òvul, es veu que té una sèrie de teguments o capes que la protegeixen, així com una gran quantitat d'aliment emmagatzemat. D'aquesta manera, l'ovari no només protegeix del medi ambient al gametòfit femení, sinó que també subministra aliment a la nova plàntula que sorgeix quan la llavor germina. Aquesta cura parental de la llavor permet la millor adaptació de les plantes vasculars al medi ambient i fa que predominin sobre altres grups vegetals. La llavor, per tant, és fonamental en la supervivència de les espècies, com s'ha assenyalat a l'apartat anterior. L'evolució de la llavor constitueix un mecanisme inavaluable d'adaptació a la vida a la Terra. La coberta de la llavor o testa la protegeix de moltes de les inclemències del medi ambient. L'embrió pot romandre latent durant molt temps, fins que hi hagi les condicions adequades per germinar i l'existència de substàncies de reserva li proporciona aliment fins que la planta pugui sobreviure per si mateixa.



Figura 26 "Falgueres amb llavors". Aquestes plantes ja han substituït les espores per llavors [27]

del grup de les gimnospermes i avui dia estan extingides. Es coneixen amb el nom de Pteridospermes que significa "falgueres amb llavors". En la figura apareix un dibuix d'aquest tipus de plantes. Aquestes eren molt semblants a les actuals falgueres i podien assolir els 5m d'alçada.

Les llavors més antigues que es coneixen procedeixen del període devonià (fa 350.000.000 d'anys). Aquests fòssils van ser trobats en roques de Pennsilvània, EUA, però no es tenen plantes fòssils que ens permetin conèixer com eren les plantes que les van produir. Entre les llavors més antigues que es coneixen estan la Gimnosperma, la qual encara no ha desenvolupat una coberta protectora completa, sinó que està envoltada per vuit lòbuls. En les llavors més avançades aquests lòbuls s'han fusionat formant un tegument protector. Durant els següents 50.000.000 d'anys es van desenvolupar diverses formes de llavors, algunes de les quals estaven adherides a plantes, semblants a les falgueres actuals. Formaven part

En les plantes ancestrals productores de llavors, aquestes es separaven de la planta progenitora i es dispersaven abans que l'embrió madurés. Com l'embrió constitueix la part fonamental de la llavor que donarà origen a l'arrel, tija i fulles, la llavor havia de madurar l'embrió abans de germinar. En canvi, en la majoria de les plantes productores de llavors d'avui dia, l'embrió madura abans de separar-se de la planta progenitora. Per tant, està protegit fins que acaba el seu desenvolupament. Aquest és un dels molts mecanisme amb el que s'incrementa el temps de cura materna de la nova generació.

A principis de l'era Mesozoica, fa 230.000.000 d'anys, va tenir lloc una radiació dels rèptils que pot correlacionar-se amb l'increment de les masses continentals i per tant, amb una major gamma de possibilitats i condicions per als organismes terrestres. Hi havia animals petits, grans com els dinosaures, aquàtics, terrestres i uns altres més que volaven. Entre les plantes predominaven els cicadals, *ginkgos* i coníferes.

Cap a finals del Mesozoic i principis del Cenozoic va haver-hi molts canvis. Van aparèixer les primeres angiospermes que probablement vivien en regions muntanyenques, mentre que les coníferes i cicadals dominaven les planícies. L'aparició de noves classes d'animals potser va ser el principal factor que va donar el primer avantatge a les angiospermes o plantes amb flors. Aquestes són superiors a les gimnospermes doncs posseeixen mecanismes més eficients d'entrecreuament, dispersió i establiment de les llavors. Els insectes i les aus són agents molt més efectius per transportar pol·len i llavors que el vent i l'aigua. Com a exemple podríem assenyalar que durant aquesta època, la família de les abelles estava en plena evolució. Els escarabats, abelles, papallones, aus i mamífers primitius van tenir una considerable influència selectiva en l'evolució de les famílies i gèneres d'aquestes plantes.

Actualment les plantes amb llavors estan dividides en dos grans grups: les gimnospermes i les angiospermes, com ja s'ha ensenyat en la Figura 25.⁸

3.3.3 Propagació de les llavors

Quan es vol propagar una planta s'empren llavors, estaquets o parts de la planta. Les llavors permeten certa variabilitat (adaptació a canvis del medi) i evolució de l'espècie, ja que es generen a partir de la reproducció sexual de dos progenitors diferents.

Perquè una planta es reproduïxi amb èxit, una vegada formades les seves llavors, és necessari que es distribueixin o dispersin a llocs on puguin germinar i establir-se. D'aquesta manera, una vegada que la planta s'estableix, la informació genètica dels progenitors queda en l'ambient. Al seu torn, quan aquesta nova planta formi llavors, la seva informació genètica estarà en les llavors que produeix i si aconseguixen establir-se quedarà en l'ambient. Així, les característiques genètiques d'una planta, que inclouen el color de les flors, la intensitat de l'aroma i la seva resistència a plagues, entre moltes altres, s'aniran transmetent de pares a fills i estaran presents en l'ambient, doncs sempre hi haurà plantes amb aquestes característiques.

Cada espècie té els seus propis requisits de germinació, amb la qual cosa no qualsevol lloc és adequat. Les característiques idònies varien segons l'espècie. Els diferents models o estratègies de dispersió de les llavors poden ser resultat de les forces que la selecció natural ha exercit sobre certes característiques de les llavors, les quals incrementen les probabilitats que arribin a un lloc adequat per germinar i establir-se.

En analitzar el model que segueix un individu per dipositar les seves llavors (ombra de les llavors), s'observa que la majoria està concentrada prop de la planta que les va produir, i conforme augmenta la distància, va disminuint el seu nombre. La distància a la qual es diposita el major nombre de llavors i la distància màxima que aconseguixen pel que fa a la planta adulta

⁸ Vegeu més informació de les plantes amb llavors a l'article de Paloma Cubas, 2008 [29]

varia entre les espècies. Per exemple, en el cas de les llavors dispersades pel vent, la distància que aconseguen és major que en el cas de les llavors dispersades per un ratolí.

Com s'havia esmentat anteriorment, els llocs adequats per germinar i establir-se varien segons l'espècie. Hi ha llavors que requereixen de llum i fluctuacions de temperatura per germinar, per tant, els llocs adequats seran aquells en els quals existeixi un clar sense vegetació, on no hi hagi una coberta de branques i el Sol incideixi directament en el sòl, i a més, on no hi hagi depredadors. Per tant, les llavors d'aquesta espècie hauran de dispersar-se fins a zones on hi hagi clars, i a la vegada a certa distància de la planta que les va produir, o bé seria necessari que haguessin estat produïdes en suficient nombre com perquè existís una bona probabilitat que arribés als petits clars que existeixen dins del propi bosc. En aquest exemple els llocs adequats estan més o menys retirats de la planta progenitora, per la qual cosa la selecció natural sobre el model de dispersió haurà afavorit que poques llavors es mantinguin prop de la planta productora i que mes bé es dispersin a una distància gran. En aquest cas també la selecció natural haurà afavorit la producció de nombroses llavors de grandària petita que fàcilment puguin ser transportades pel vent i en suficient nombre per aconseguir els clars dispersos entre la vegetació.

3.3.3.1 Agents de dispersió

El transportar i allunyar a les llavors de la planta progenitora generalment requereix d'un agent extern de dispersió com és l'aigua, vent o animals. En ocasions les llavors presenten una primera fase de dispersió que involucra a un agent que les separa a curta distància de la planta progenitora i una segona fase de dispersió, de vegades amb un altre agent, que els permet separar-se a majors distàncies.

La dispersió de les llavors és un dels capítols més interessants en la vida de la planta. En aquesta fase la naturalesa ha desenvolupat una enorme creativitat de formes, situacions i respostes. La varietat és immensa i seria impossible relatar-ne tots els casos.

3.3.3.1.1 Anemocòria (dispersió per vent)

L'anemocòria consisteix a aprofitar la força del vent per a la disseminació. Permet recórrer grans distàncies, però el resultat és aleatori i pel camí es perden nombroses llavors, que cauen en ambients hostils on no poden germinar. Existeix una gran varietat d'apèndixs, com ara arestes,

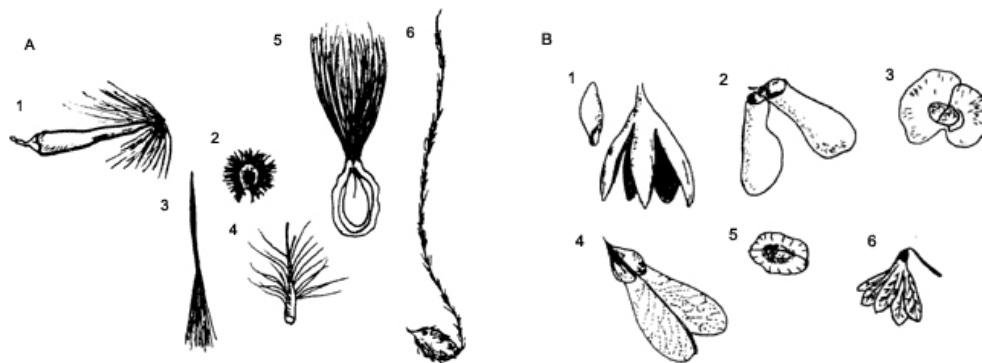


Figura 27 Llavors dispersades amb el vent. A) Llavors amb els diferents tipus d'estructures amb forma de plumes que ajuden a les llavors a dispersar-se amb el vent. 1. *Platanus occidentalis*, 2. *Bellotia mexicana*, 3. *Rhabdadenia biflora*, 4. *Tamarix parvifolia*, 5. *Asclepias curassavica*, 6. *Clematis spp.* B) Llavors amb. 1. Fruit i llavor de la *Cedrela odorata*, 2. *Heteropteris macrostachya*, 3. *Hiraea affinis*, 4. *Thinovia myriantha*, 5. *Urvillea almacea*, 6. *Petrea bracteata*. [27]

corones de pèls i corones membranàcies, que faciliten la suspensió en l'aire i allarguen així la distància recorreguda.^[29]

Les llavors dispersades per vent són distribuïdes en l'ambient separades entre si, ja que són transportades "d'una en una". Per tant és poc probable que les plàntules de la mateixa espècie germinin a prop i competeixin entre si per recursos.

Durant les tempestes, la velocitat del vent augmenta considerablement, factor que ajuda a dispersar les llavors a distàncies majors. S'han registrat distàncies de diversos quilòmetres per a algunes espècies com: *Abies* (7km); *Pinus sylvestris* (2km); *Betula* (1,6km); *Acer* (4km); *Fraxinus excelsior* (0,5km); *Tussilago* (14km); *Populus* (30km); *Senecio congestus* (200km).

S'especificaran els diferents tipus de dispersió per anemocòria al següent apartat (3.3.4).

3.3.3.1.2 Zoocòria (dispersió per animals)

La dispersió facilitada pels animals, o zoocòria, és una alternativa més segura que l'anterior; com a conseqüència, les plantes solen formar menys diàspores i de major grandària. Els fruits carnosos constitueixen l'adaptació més coneguda en aquest tipus de disseminació.

A través de la dispersió de llavors per animals s'ha establert una dependència mútua entre les plantes i els dispersors. En molts casos això ha portat a una coevolució entre tots dos, per exemple, entre els frugívors especialistes. En el cas de les aus, hi ha des d'exclusivament frugívors (que solament s'alimenten de fruits) fins a frugívors ocasionals, que són principalment insectívores i només de tant en tant s'alimenten de fruits. Els animals els ingereixen amb les llavors incloses, travessen el tub digestiu sense veure's alterades i, són alliberades amb els excrements, lluny de les plantes progenitores.

Hi ha diferents graus de relació entre les plantes i les seves dispersores i, diferents mecanismes que a continuació s'exposen:

- **Ecto zoocòria** (dispersió externa per animals): Moltes llavors o fruits tenen adaptacions que els permeten adherir-se al cos dels animals. Aquest tipus de llavors tenen apèndixs en forma de ganxos o substàncies enganxoses amb les quals s'adhereixen al pèl o a les plomes dels animals.

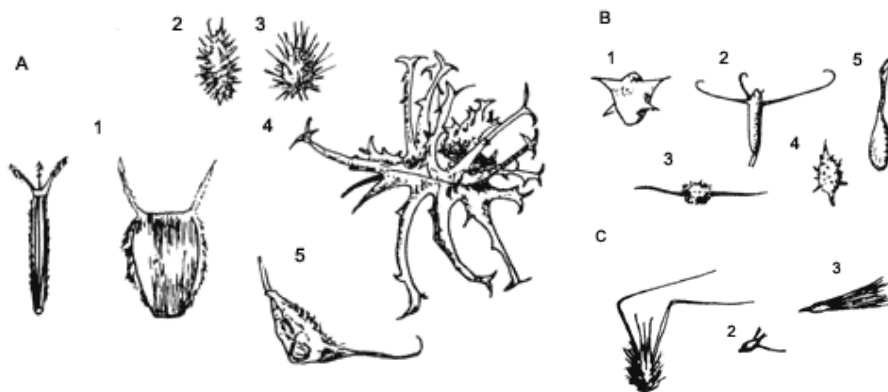


Figura 28 A) Llavors amb ganxos que s'adhereixen a la roba així com al pelatge dels animals. *Bidens* 1, *Xanthium* 2, *Cenchrus* 3, *Harpagophytum* 4, *Proboscidea* 5. B) Ganxos que els permeten anorar-se al substrat: *Trapanatans* 1, *Trapella sinensis* 2, *Blyxa echinosperma* 3, *Ceratophyllum demersum* 4, *Zoostera marina* 5. C) Estructures que els permeten desplaçar-se i modificar la seva posició una vegada al terra. 1 *Centaurea cyanus*, 2 *Trifolium squarrosum*, 3 *Aegilops ovata*. [27]

- **Mirmecocòria** (dispersió per formigues): Les formigues són un grup important de dispersores ja que recol·lecten llavors i les porten als seus nius. Constitueix un tipus de ectozoocòria, però és tan especialitzat a causa de la relació que s'estableix entre la formiga i la planta, que els botànics ho han tractat per separat, donant-li un nom específic.



Figura 29 Dispersió de les lleties d'aigua per ectozoocòria (*Lemnoidae*) [31]



Figura 30 *Messor barbarus* portant al niu un eleosoma de *Centaurea pullata* [30]

- **Endozocòria** (dispersió interna per animals): Nombroses llavors estan adaptades per ser transportades per animals, però de forma interna. Freqüentment tenen una coberta cridanera, nutritiva o tenen algun material comestible adherit que atreu als animals i els serveix com recompensa. Són capaços de tolerar el pas pel sistema bucal (tritració) i pel tracte digestiu (tractament químic) dels seus dispersors. Les llavors estan diferents lapses de temps dins de l'organisme. El menor temps es dona quan són regurgitades, ja que llavors ni tan sols travessen el tracte digestiu de les aus. També hi ha fruits amb substàncies químiques que acceleren el seu pas pels intestins. O bé, simplement és possible que les llavors tinguin suficient protecció, per exemple una testa dura i impermeable, que les protegeixi durant tota la seva estada en aquest ambient tan aliè i destructiu. Mentre més temps romanguin dins, la dispersió de les llavors serà a més distància, però també serà major la probabilitat que sofreixin danys per estar en contacte amb els àcids de l'estómac.



Figura 31 (ornitocòria) Les aus es troben entre els principals animals que dispersen fruits i llavors. En general ho fan de manera accidental, quan realitzen les seves activitats alimentàries (depredació). Lloro vermell (*Psittacoidea*) menjant una poma [32]

3.3.3.1.3 Hidrocòria (dispersió per aigua)

L'aigua és un agent dispersor important en plantes aquàtiques i costaneres, encara que algunes d'aquestes espècies també es dispersen mitjançant aus o peixos. A continuació es descriuen alguns mecanismes que presenten les llavors i que els permeten utilitzar l'aigua com a agent de dispersió:

- **Dispersió per pluja:** Hi ha llavors poc especialitzades, com ara les que simplement obren els seus fruits i exposen les llavors de manera que quan plou, aquestes caiguin del fruit i l'aigua de pluja que llisca pel terra les allunyi uns metres més. Tanmateix, n'hi ha d'altres més preparades, com la de la Figura 33, on els fruits estan orientats horitzontalment, de manera que la superfície que rep l'impacte de les gotes de pluja és major i les llavors són llançades a majors distàncies.
- **Dispersió per corrents:** Les llavors que són dispersades per corrents d'aigua tenen la necessitat de surar, de manera que puguin recórrer certa distància. Aquestes llavors tenen diverses característiques que els permeten flotar tant en aigua dolça com salada.



Figura 33 les llavors de la *Thlapsi alpestre* són llançades a 80cm de distància amb la pluja [33]



Figura 32 Coco (llavor de la cocotera [*Cocos nucifera*]) germinant a la platja de Punalu'u [34]



Figura 34 *Nymphaea alba* presenta llavors pesades que incrementen la seva superfície per poder surar [35]

3.3.3.1.4 Autocòria

Dins d'aquest grup es troben les espècies en les quals la pròpia planta és l'encarregada de la dispersió de les llavors i participa de manera més activa en el propi procés. Els fruits d'aquest grup cauen, exploten, i llancen les llavors.

El procés acostuma a tenir relació amb les tensions que genera la dessecació de les cobertes dels fruits i que proporcionen l'energia necessària per llançar les llavors cap a l'exterior. Però altres vegades es requereix d'un agent extern que procuri l'energia necessària perquè es dugui a terme la ruptura i expulsió de les llavors. Freqüentment és un animal que en passar frega el fruit i fa que s'obri. Altres vegades és la pluja i altres més és el vent.

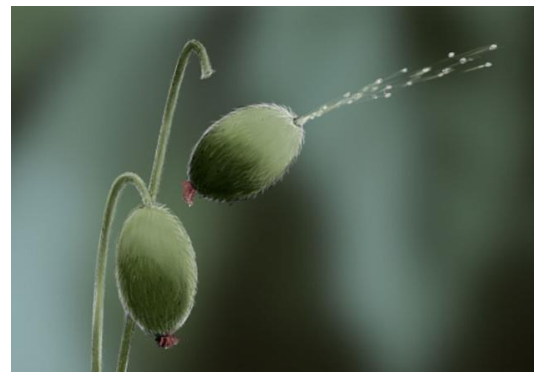


Figura 35 Esquitxagossos (*Ecballium elaterium*) expulsant llavors [36]

3.3.3.1.5 Barocòria

En aquesta categoria es col·loquen les espècies amb llavors grans i pesades que cauen pel seu propi pes. No obstant això, és una categoria poc clara; s'ha comprovat que moltes espècies es consideraven barocores ja que no es coneixia el mecanisme de dispersió. Exemples d'espècies que es consideren dins d'aquesta classe de primera fase de dispersió són *Aesculus hippocastanum* i *Mora excelsa*.



Figura 36 Llavor de *Mora excelsa* [40]

3.3.4 El vol de les llavors

Com s'ha esmentat anteriorment, un factor important en la dispersió aèria de les llavors és el vent. Algunes llavors estan dotades de petits paracaigudes que posseeixen filaments minúsculs que els permeten generar una força d'arrossegament suficient per descendir lentament cap al sòl (*parachuting flight*); unes altres han evolucionat amb ales membranoses que permeten generar sustentació.^[37]

Al seu torn, les llavors alades poden presentar també diferents mecanismes de vol: algunes d'elles planegen (*gliding flight*), unes altres descendeixen balancejant-se (*rocking down*), i algunes exhibeixen un moviment de rotació estable mentre cauen (*spinning flight*). Aquests mètodes de dispersió han estat estudiats exhaustivament en el passat, per exemple en el treball de Azuma i Yasuda (1989)^[38] el qual conté una descripció detallada de l'acompliment aerodinàmic de llavors voladores.

3.3.4.1 Llavors paracaigudistes (*parachuting flight*)

Una de les famílies que típicament desplacen les seves llavors amb el vent és la de les compostes. Aquestes presenten fruits d'una sola llavor anomenats aquenis que constitueixen l'estructura que es dispersa. Freqüentment tenen apèndixs que els permeten ser transportats pels corrents de vent i que també actuen com una espècie de paracaigudes que els permet dipositar-se en el sòl. A aquestes estructures se'ls anomena ploma (pappus, vil·la) i una llavor pot tenir des d'una fins a diverses, la qual cosa li dóna un aspecte pelut.

Es podria dir que les llavors que exhibeixen un vol d'aquesta naturalesa estan constituïdes per un petit paracaigudes disposat sobre una estructura esfèrica, semiesfèrica o una espècie de con circular. Val a dir que en absència de vent, aquestes llavors cauen seguint una trajectòria vertical a una velocitat constant, la qual és aconseguida quan la força d'arrossegament aerodinàmica equilibra el pes de la llavor.

Les característiques morfològiques que presenten les "llavors paracaigudistes" permeten afirmar que van ser especialment "dissenyades" per desplaçar-se passivament amb un corrent d'aire i, que la distància que elles poden recórrer és directament proporcional a la taxa de descens. D'altra banda, la forma dels filaments (espècie de plomes) que conformen el paracaigudes poden afectar substancialment a la capacitat de dispersió de les llavors.

Aquestes estructures també permeten que la llavor, en separar-se de la planta progenitora, disminueixi la seva velocitat de caiguda i s'incrementi la probabilitat que els corrents de vent la transportin. Entre els factors que poden afectar la distància a la qual són transportades (forma

de l'ombra de llavors) estan la forma i grandària de la llavor, l'altura de la planta que les produeix i per tant a la qual s'alliberen, la velocitat del vent i la densitat de la vegetació que les envolta. Aquest últim constitueix un aspecte important en la dispersió de les llavors. Algunes plantes com les gramínies produeixen els seus fruits en l'extrem de tiges allargades que sobresurten de la vegetació, exposant-los així als corrents d'aire.

Cal afegir que aquestes llavors poden transportar-se a majors distàncies que les llavors alades. Comparant llavors sense cap estructura especial de dispersió amb llavors amb apèndixs tipus ploma, es va trobar que les primeres se separen només d'un a tres metres de la planta progenitora, mentre que les segones ho fan entre 40 (*Asclepias syriaca*) i 80 metres (*Apocynum sibiricum*)

El vol d'aquest tipus d'estructures està sent considerat actualment com a font d'inspiració per desenvolupar una nova generació de paracaigudes lleugers. Aquesta idea implica la utilització de mecanismes concebuts per funcionar reeixidament a petites escales; l'adaptació d'aquests a escales més grans com les que caracteritzen als paracaigudes convencionals suposarà l'abordatge d'importants desafiaments biomecànics i aerodinàmics (Pandolfi i Izzo, 2013)^[39].

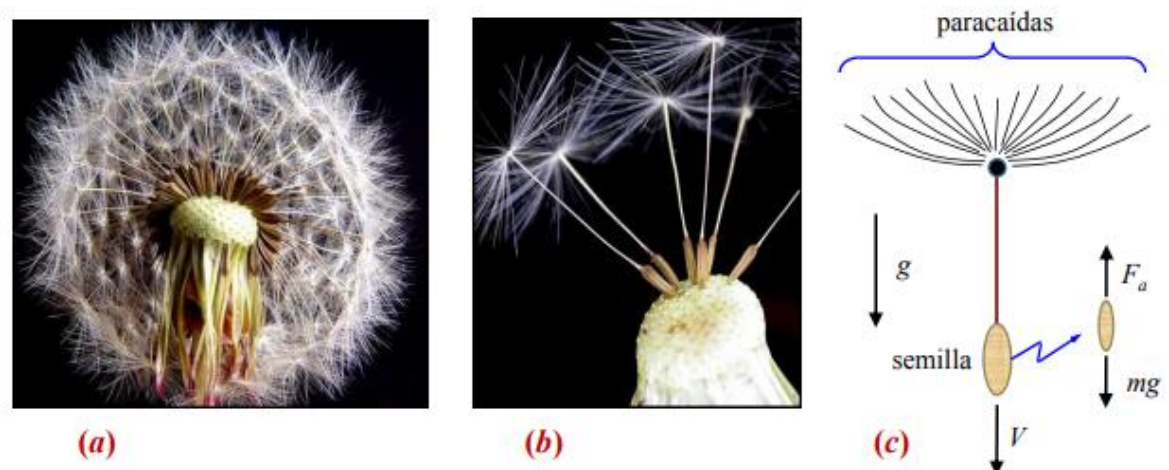


Figura 37 (a) i (b) llavors plumoses de dent de lleó (*Taraxacum officinale*). (c) esquema mostrant la caiguda d'una llavor paracaigudista [37]

3.3.4.2 Llavors planejadores (*gliding flight*)

Cert tipus d'arbustos, arbres i plantes trepadores dispersen les seves llavors per mitjà del mecanisme de vol denominat "planatge" (*gliding flight*). Algunes d'aquestes llavors posseeixen dues membranes primes entre les quals es situa pròpiament la llavor. Aquestes membranes creixen en forma simètrica i actuen com a superfícies sustentadores, les quals permeten a la llavor experimentar un planatge en línia recta durant un temps perllongat en una atmosfera quieta. En general, les trajectòries de vol que caracteritzen a les "llavors planejadores" són bastants empinades entre 35° i 90°. En aquest rang, les llavors maximitzen l'eficiència aerodinàmica o la relació sustentació/arrossegament (i conseqüentment minimitzen la taxa de descens); efecte que ha estat demostrat en túnels de vent.

Les trajectòries que executen les "llavors planejadores" són molt variades, sent les més usuals: 1) el descens en línia recta; 2) el descens en espiral; i 3) el descens oscil·lant (o balanceig). Igual que en l'estudi d'aeronaus no propulsades, les trajectòries que segueixen les llavors d'aquest grup són determinades per mitjà del balanç de tres forces: el pes, la força de sustentació, i la

força d'arrossegament. En aire tranquil, i per a una trajectòria lineal, la distància recorreguda per la llavor és directament proporcional a l'altura des de la qual aquesta és alliberada.

Aquelles llavors que no poden aconseguir la distància suficient per caure fora de la “ombra” de l'arbre pare a causa d'una pobra relació sustentació/arrossegament o perquè exhibeixen una trajectòria en espiral o oscil·lant, difícilment podran germinar. Aquest punt evidencia novament la gran importància que tenen els mecanismes aerodinàmics en la dispersió de les llavors.

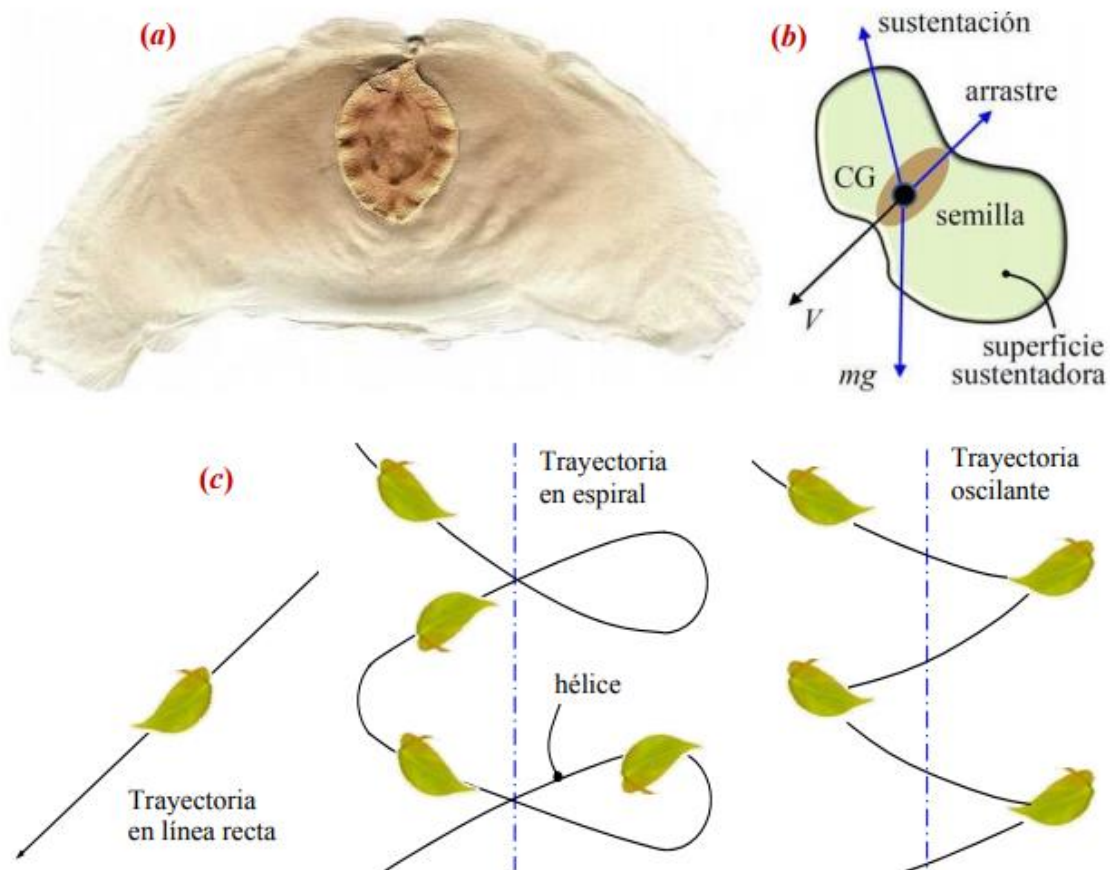


Figura 38 Llavors planejadores. (a) *Alsomitra Macrocarpa*; (b) Aerodinàmica del vol d'una llavor planejant (c) exemples típics de descens de llavors planejadores [37]

3.3.4.3 Llavors rodants (*tumbleweeds*)

Aquesta estratègia de dispersió es presenta quan grans peces de la planta (que tenen les llavors) es desenganxen de la seva arrel i comencen a ser transportades pel vent. Aquest mètode de dispersió és característic d'espècies de plantes generalment esfèriques que creixen en deserts, prades, estepes i altres àrees obertes subjectes a vents forts. Un mecanisme similar de dispersió és usat per les plantes que es desenvolupen en les dunes de sorra prop de la riba del mar. Mentre són empeses pel vent, roden pel sòl alliberant milers de llavors sobre àmplies zones. Alguns exemples d'aquest tipus de plantes són el card rus (*Salsola Kali*) i aquelles que creixen en les colines de sorra de Florida (*Baptisia lanceolata*). Una altra espècie la infructescència de la qual també roda és *Spinifex squarrosus*, que habita les platges de la Illa de Java, igual que altres espècies d'aquest mateix gènere que viuen en les estepes d'Austràlia.

Les distàncies a les quals es dispersen les llavors d'aquestes plantes són majors (9 m) quan les llavors romanen adherides al fruit i roden amb tota la planta que quan cauen directament del fruit (2 m) abans que la planta comenci a rodar.

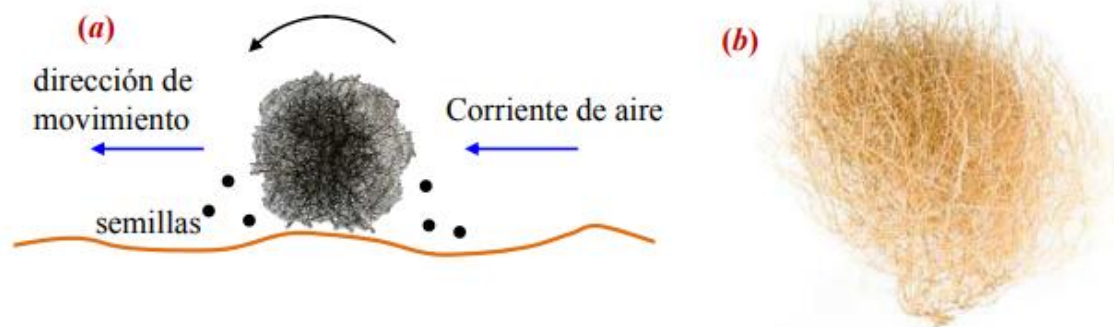


Figura 39 (a) Mecanisme de dispersió rodant (tumbleweed) (b) card rus [37]

3.3.4.4 Llavors autorotants (spinning flight)

Sens dubte, un dels dissenys evolutius més fascinants dins del regne vegetal són les llavors alades que exhibeixen un moviment d'autorotació mentre cauen cap al sòl. Com a conseqüència d'aquesta rotació les "llavors autorotants" (sàmares) descendeixen amb una velocitat terminal molt menor que la resta de les llavors que utilitzen altres mitjans de dispersió aeris. Específicament, les diferències més importants entre les llavors que planegen i aquelles que utilitzen l'autorotació són: 1) el centre de gravetat de tota la llavor està localitzat en un extrem de la mateixa; i 2) l'àrea de l'ala (S) és petita, però l'àrea del disc (o d'escombratge) (A) generada per la rotació de l'ala és gran. La primera propietat afavoreix el ràpid inici de l'autorotació, mentre que la segona permet aconseguir un descens estable de la llavor en el seu camí cap al sòl.

Nombrosos experiments han mostrat que en una atmosfera tranquil·la certes sàmares (per exemple les llavors d'auró) poden seguir dos tipus de trajectòries diferents. Amb la manera de vol més freqüent, el centre de rotació descriu una línia vertical recta i coincideix aproximadament amb la trajectòria descrita pel centre de massa; d'altra banda, la corba espacial que traça la punta de l'ala mentre gira i descendeix és una hèlix simple (veure Figura 4c). A més d'aquest tipus de vol, existeix un segon tipus més complex que l'anterior (veure Figura 4d), caracteritzat per un moviment compost en el qual el centre de rotació de l'ala també executa un moviment helicoïdal (Ward-Smith, 1984^[41]).

A diferència dels tipus de vol explicats anteriorment, les llavors del freixe, per exemple, manifesten un estil de vol encara més complicat. Igual que les sàmares d'auró, el centre de massa de la llavor del freixe està molt proper, o gairebé coincideix amb el centre de rotació de la llavor; punt al voltant de la qual la punta de la sàmara descriu una corba tridimensional en forma d'hèlix. No obstant això, observacions detallades han revelat que aquest tipus de sàmares roten, a més, al voltant del seu eix longitudinal (McCutchen, 1977^[42]) (veure Figura 40 (e)). Aquesta segona rotació està caracteritzada per una velocitat de gir que pot ser més gran que el moviment de rotació principal; típicament per cada volta completa al voltant de l'eix vertical, la sàmara realitza entre una i sis revolucions girant respecte del seu eix longitudinal. S'ha de destacar, que actualment no és ben entès quina influència té aquest moviment addicional sobre

l'aerodinàmica del sistema i més profundament sobre la capacitat de dispersió de la llavor; Ward-Smith (1984)^[41] ho estableix com un punt a considerar en futures recerques.

Finalment, s'ha d'esmentar que la notable similitud entre els moviments que realitzen les llavors autorotants i aquells que descriuen les aspes dels helicòpters i autogirs, permet aplicar les teories concebudes per estudiar rotors d'helicòpters a l'anàlisi del comportament aerodinàmic de les sàmares (Norberg, 1973)^[43].

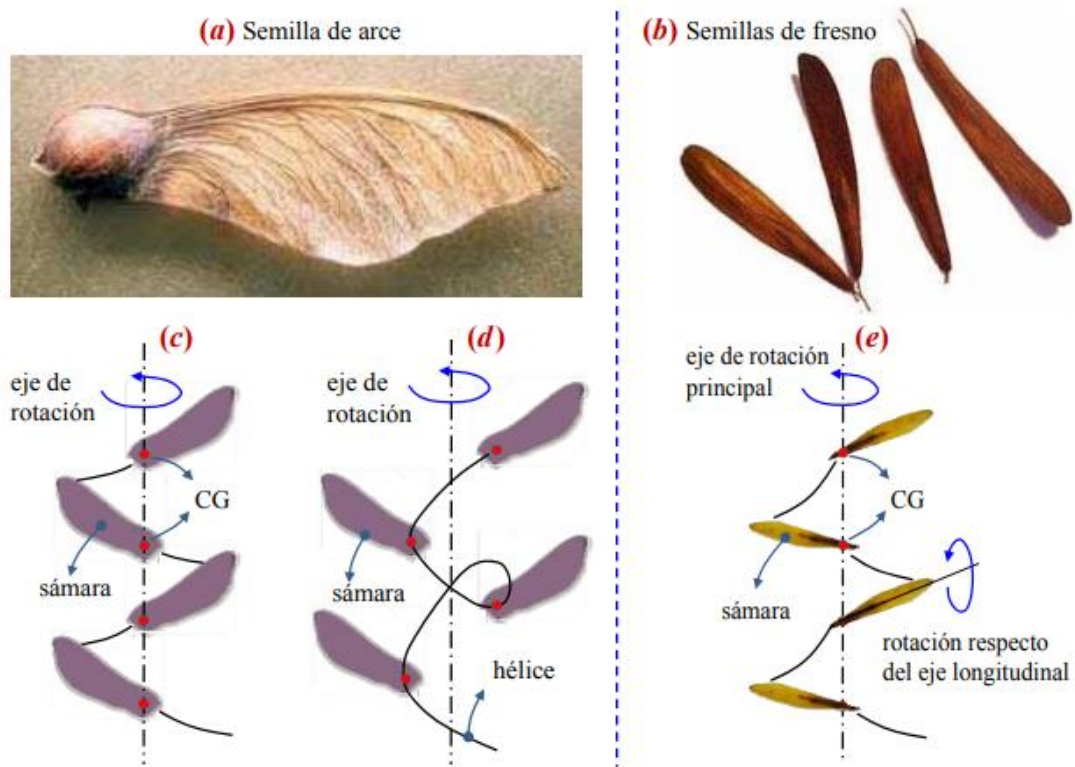


Figura 40 Llavors autorotants. (a) Llavor d'auró; (b) Llavor de freixe; (c) Moviment simple; (d) Moviment compost; (e) Configuració de rotació respecte de dos eixos [37]

4. DETERMINACIÓ EXPERIMENTAL DE LES MILLORS CONDICIONS ESTRUCTURALS D'UN HELICÒPTER DE PAPER PER ASSOLIR UNA VELOCITAT TERMINAL MÍNIMA

4.1 DESCRIPCIÓ DE L'EXPERIMENT

Com ja s'ha anat dient al llarg del treball, el model cinemàtic de les llavors s'estudiarà amb l'ajuda de l'estructura de l'helicòpter de paper. Per tal de resoldre l'objectiu plantejat i els que en deriven, és a dir, quina ha de ser la geometria/estructura de l'helicòpter de paper per tal que la seva velocitat de descendència sigui mínima (estigui el major temps possible en suspensió) es desenvoluparan diverses tasques:

Construcció de l'helicòpter de paper: es munta l'helicòpter de paper tenint en compte la variable que s'ha d'estudiar (per exemple, si es vol estudiar la influència de la massa, s'han de construir diversos helicòpters de paper que mantinguin totes les variables constants a excepció de la massa de l'enginy). Les variables estudiades són: massa, angle d'obertura de les ales i longitud de les ales (que s'han decidit després de comparar diferents llavors a partir de l'herbari).

Gravació del vídeo: es grava o bé amb el telèfon mòbil, o preferentment amb una càmera de més qualitat fotogràfica, la caiguda de l'enginy. Per tal d'estudiar la velocitat angular del model, la gravació haurà de ser perpendicular a la caiguda de l'helicòpter, per tant, es registrarà la caiguda des de la vista aèria. Per tal d'analitzar la velocitat terminal del model, la gravació haurà de ser paral·lela a la caiguda de l'estructura de paper, de forma que, es registrarà la caiguda des d'un dels perfils.

Recollida de dades: (s'explica el procediment en l'apartat 4.4 PROCEDIMENT, encara que el anàlisi es troba a l'ANNEX 2) a partir dels vídeos, s'usarà el programari *Tracker* (la pàgina de descàrrega es pot trobar a l'apartat de referències), que recull les dades (y-t) i (x-t) en funció del temps de qualsevol element en un vídeo i, a més, permet a l'usuari la creació de gràfiques.

Càlculs: (apartat 4.5. OBSERVACIÓ DELS RESULTATS, ANÀLISI I DISCUSSIÓ) a partir de les dades obtingudes gràcies al programari i interpretades en l'ANNEX 2, es resoldran els objectius plantejats. També es farà ús del programari *Curve expert*, per tal de relacionar la dependència de diverses variables entre elles.

4.2 UTILLATGE

S'ha dividit la secció d'utilatge en tres apartats, per tal de facilitar l'inventari i el seguiment del procediment.

4.2.1 Material

En aquest apartat es poden trobar els objectes i estris necessaris per desenvolupar l'helicòpter de paper (i els dispensables per canviar o mantenir constants les variables que poden afectar al seu vol):

- | | |
|----------------------------------|--------------------------|
| - Cartolines | - Gomets i retoladors |
| - Tisoires, regle, llapis i goma | - Clips i cinta adhesiva |
| - Transportador d'angles | - Balança de precisió |



Figura 41 Tisores de paper, llapis HB Staedtler, regle (de 15,0 cm) i goma d'esborrar Staedtler.



Figura 42 Cartolines de colors A4 (180g/m2).



Figura 43 Retoladors Staedtler Noris Club i gomets grocs Apli (diàmetre=10,5mm).

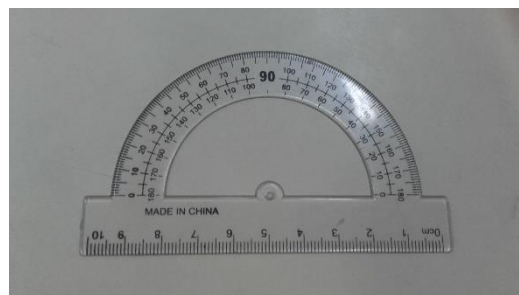


Figura 44 Transportador d'angles. Aquest aparell serveix per influir en l'angle d'obertura de les ales de l'helicòpter de paper.



Figura 45 Clips Staples (32mm) i cinta adhesiva invisible MP (18mm d'amplada). Aquests estris serveixen per influir en la massa de l'enginy.



Figura 46 Balança Kern 440-33 (màx. 200g i $\delta = 0,01g$) Aquesta serveix per mesurar amb precisió la massa de l'helicòpter de paper.

4.2.2 Aparells electrònics d'enregistrament

En aquest estudi s'han usat dos dispositius diferents, el mateix telèfon mòbil i una GoPro. En un principi, la càmera del telèfon mòbil és suficient per tal de gravar el moviment descendent de l'helicòpter de paper (sobretot si es tracta de la filmació lateral), tot i això, es poden presentar alguns problemes a l'hora d'estudiar el moviment de rotació de l'enginy al programari Tracker. En aquests casos es pot emprar algun dispositiu que permeti gravar vídeos amb una major quantitat de fotogrames i resolució.

A continuació es presenten algunes de les característiques (en relació a la càmera) dels dispositius usats en el treball:

Telèfon mòbil: Samsung Galaxy Grand Prime

- Resolució de la càmera principal: 8.0 MP
- Resolució de gravació de vídeo: HD (1280 x 720)
- 30 fps



Figura 47 Samsung Galaxy Grand Prime [44]

Càmera: GoPro HERO 6 Black


- Resolució de la càmera: 12 MP
- Resolució de gravació de vídeo: 4K, 2.7K, 1440p, 1080p i 720p
- A elegir entre: 120, 100, 60, 50, 30, 25 i 24 fps




Figura 48 GoPro HERO 6 Black [45]

4.2.3 Programes informàtics

Com ja s'ha clarificat en la descripció de l'experiment, en aquest estudi s'usen dos programes diferents, el Tracker i el Curve expert, els quals tenen funcions diferents i són les que podeu veure a continuació:

 **Curve Expert Basic 2.0** ^[46]: (la pàgina de descàrrega es pot trobar a l'apartat de referències, allà també hi ha la possibilitat de baixar-te el professional) Aquest programari (desenvolupat per Daniel G. Hyams), que és gratuït, permet a l'usuari la creació de gràfiques mitjançant dades XY que poden ser modelades utilitzant unes eines de models lineals de regressió, models no lineals de regressió, interpolació, i estries.

 **Tracker Video Analysis and Modeling Tool** ^[47]: (la pàgina de descàrrega es pot trobar a l'apartat de referències) Aquest programari (desenvolupat per Douglas Brown) totalment gratuït permet fer un seguiment manual i automàtic d'objectes (a partir d'un vídeo) amb superposicions i dades de posició, velocitat i acceleració, mitjançant:

- Centre de pistes de masses.
- Vectors gràfics interactius i sumes vectorials.
- Perfils de línia RGB en qualsevol angle, regions RGB dependents del temps.

A banda d'això, el més interessant és que a partir de les dades introduïdes, el Tracker crea models cinemàtics i dinàmics de partícules de massa puntuals i sistemes de dos cossos, a més a més l'eina d'anàlisi de dades inclou potents ajustos de corbes automàtiques i manuals.

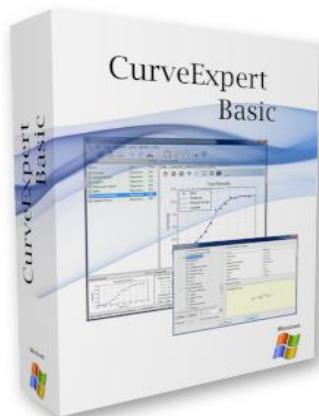


Figura 49 Curve Expert Basic 2.0 [46]



Figura 50 Tracker [47]

4.3 DIBUIX DEL MUNTATGE

A continuació es mostra en un mateix esquema les dues formes de filmació de l'helicòpter de paper que s'han de dur a terme en aquesta recerca.

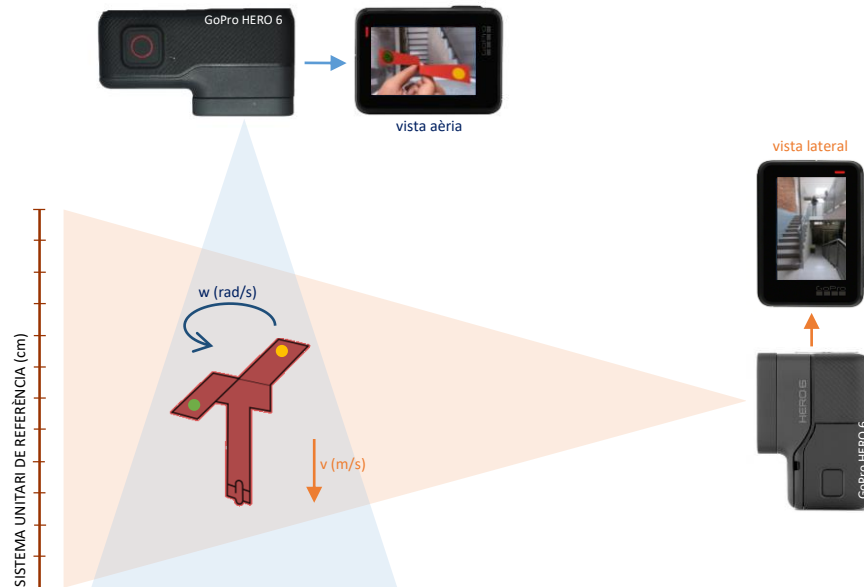


Figura 51 Esquema representatiu de les dues formes de filmació

D'altra banda, en aquest mateix apartat es presenten alguns criteris que s'haurien de tenir en compte a l'hora de realitzar gravacions amb una càmera (encara que se'n especifiquen alguns més a l'apartat 4.4.2 Enregistrament dels videoclips):

- La millor llum que es pot utilitzar segueix aquest ordre: 1) Llum natural, 2) Llum de focus de 500Wp.e., 3) Llum de bombetes d'incandescència, 4) Llum de fluorescents (en algunes càmeres es pot especificar el tipus de llum utilitzada).
- L'helicòpter de paper que es deixi caure ha de ser d'un color que contrasti amb el fons (preferentment blanc o negre) ¹¹.
- S'ha de situar la càmera de vídeo sobre un trípode o en un lloc fix, col·locada amb el seu eix horitzontal, de manera que es vegi tot el moviment de l'objecte a gravar sense moure la càmera.
- La trajectòria de l'objecte (vista lateral) ha de ser perpendicular a la visual AB aproximadament, de tal manera que l'objecte que s'està movent tingui sempre la mateixa mida a la pel·lícula.

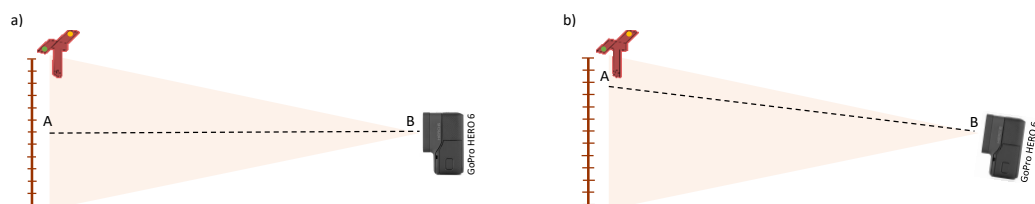


Figura 52 En la figura a) la visual AB és perpendicular a la direcció del moviment, mentre que en la figura b) NO

4.4 PROCEDIMENT

4.4.1 Construcció d'un helicòpter de paper

Per tal d'elaborar un helicòpter de paper només cal seguir aquests senzills passos:

1. Es dibuixa el següent model⁹ en una cartolina¹⁰ de colors¹¹: blau, groc o roig, i es retalla (línies contínues). En cas que es vulguin variar les dimensions de les ales, caldrà reduir o ampliar la seva longitud o amplada.

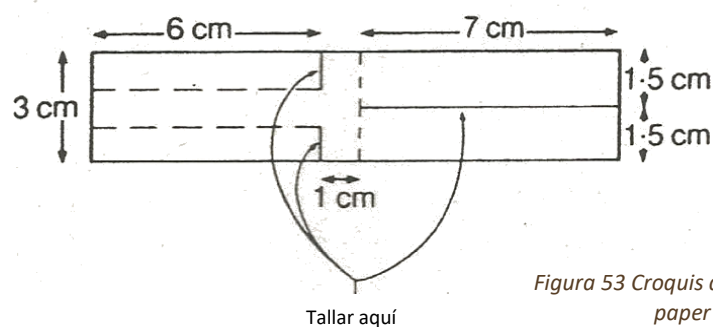


Figura 53 Croquis de l'helicòpter de paper [48]

2. Després, es dobleguen les diferents parts que estan marcades amb línies discontinúes i s'enganxa un gomet a cada ala (si pot ser de diferent color). En cas que es vulgui variar la massa s'afegiran clips a la base (o cinta adhesiva, en cas que es vulgui ajustar el valor de la massa a una xifra en concret) tal i com es mostra en la següent figura.

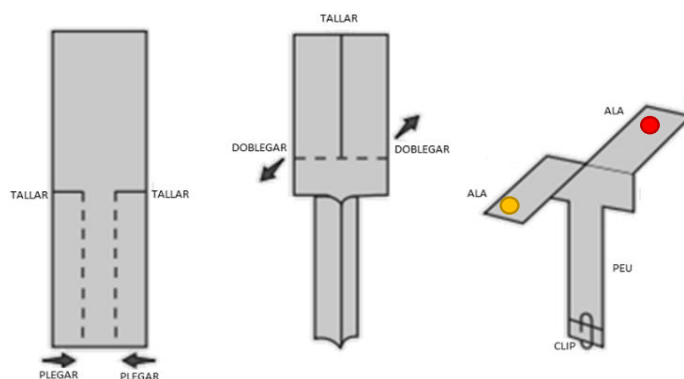


Figura 54 Muntatge de l'helicòpter de paper [1]

⁹ Abans de començar a prendre dades definitives, es van realitzar diversos models d'helicòpters, per veure quin era el més adient com a format estàndard. Finalment es va escollir el que ens proporciona *Carles Parejo* ^[6] en el seu document *Per què volen les coses?*

¹⁰ Per tal de poder mesurar els graus de l'ala, cal que el material amb el que estigui fet el twister sigui fàcil de manipular però, alhora, que mantingui els graus prèviament calculats el màxim possible. D'aquesta forma, s'ha triat la cartolina com a material de l'helicòpter, ja que compleix les dues característiques.

¹¹ Una vegada es va escollir el model i el material del twister, es va observar que si el paper amb el que es feia era blanc, de vegades les ales, o el mateix peu, no contrastaven amb el fons. Amb la qual cosa, a l'hora d'analitzar el vídeo amb el Tracker, l'estructura no estava prou definida com per poder marcar-la en cada fotograma. Per tant, es va realitzar un breu estudi on es va deixar com a variable constant el color blanc de fons i, d'altra banda es va anar canviant el color del paper del twister (vermell, blau, verd, blanc, groc i rosa [depèn de quin amb més d'una tonalitat]). Cal afegir, que per marcar les ales, es va enganxar un gomet a cada ala de colors oposats, per tal de distingir millor les ales en l'anàlisi amb el Tracker. Finalment, es va determinar que els millors colors pel twister sobre el fons blanc eren: groc (amb un gomet roig i negre), vermell (amb un gomet groc i negre) i blau (amb un gomet groc i negre/roig).

3. A continuació s'ajusta l'angle d'obertura de les ales amb l'ajuda d'un transportador d'angles.

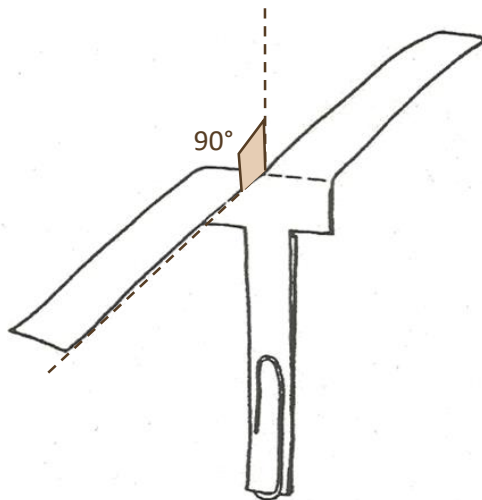


Figura 55 Mesura de l'angle d'obertura de les ales [48]

4. Finalment, es comprova que funcioni correctament, deixant-lo caure des d'una altura aproximada de dos metres

4.4.2 Enregistrament dels videoclips

Una vegada ja s'han elaborat els helicòpter de paper que es volen estudiar, s'ha de registrar en

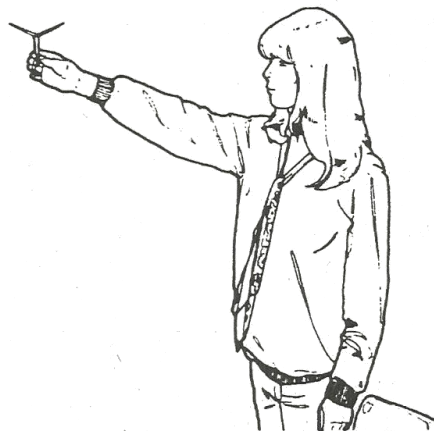


Figura 56 Individu deixant caure el volant des d'una cadira [48]

vídeo la seva caiguda. Com ja s'havia mencionat anteriorment, per cada helicòpter es realitzen vídeos de dues formes diferents (i amb diverses rèpliques de cada manera per tal de minimitzar els errors). En el següents subapartats podeu veure alguns consells per registrar els diversos vídeos.

4.4.2.1 Vista aèria

Aquesta perspectiva permet estudiar la velocitat angular de l'enginy mentre efectua la seva caiguda. Per tal de gravar-ho, només cal tenir en compte els següents factors:

- Abans de començar a gravar, s'ha de comprovar que l'helicòpter de paper es trobi al centre de la filmació.

- La càmera (en aquest cas es recomana usar el dispositiu que pugui captar més fotogrames per segon) ha d'estar completament fixa i perpendicular a l'helicòpter de paper, ja que si no hi poden haver problemes a l'hora d'estudiar el videoclip.
- Sempre s'han de procurar enregistrar els vídeos des de la mateixa alçada, per exemple des d'una escala de mà (aproximadament 2,30m).
- Es recomanable fer almenys entre dos i tres rèpliques del vídeo.

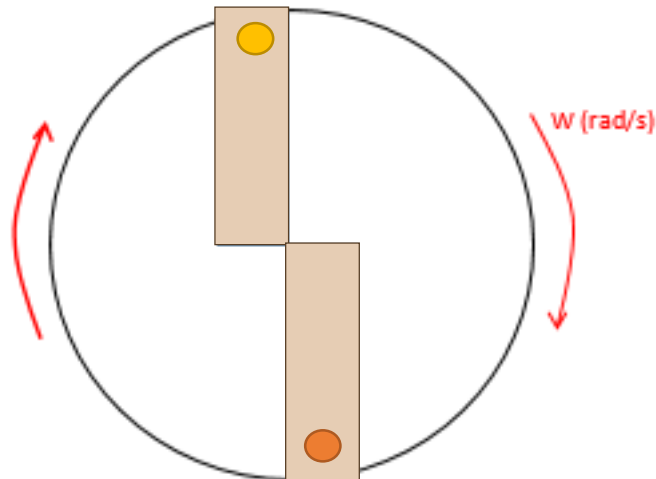


Figura 57 Vista aèria de l'helicòpter de paper

4.4.2.2 Vista frontal

Aquesta perspectiva permet estudiar la velocitat terminal de l'enginy mentre efectua la seva caiguda. Per tal de gravar-ho, només cal tenir en compte els següents factors:

- Abans de filmar cal posar algun sistema unitari de referència (com per exemple un regle de 100cm) al costat de l'individu que llanci l'helicòpter de paper (aquest ens servirà com a mesura de referència).
- En aquest cas es sol·licitarà l'ajuda d'alguna persona que deixi caure l'helicòpter de paper des d'una alçada determinada (a excepció que la càmera disposi de control remot, com ara acció per veu), com per exemple de d'unes escales (aproximadament 4m).
- La càmera ha d'estar completament fixa i paral·lela a l'helicòpter de paper, intentant captar el millor possible el tram mitja de caiguda, com ja s'ha esmentat a l'apartat 4.3
- L'individu que gravi (o el trípod que subjecti la càmera) ha de situar-se a certa distància de l'enginy, si es filma la situació en que l'helicòpter de paper cau des d'una alçada de 4m, caldrà situar-se lluny (al voltant dels 5 m de distància), com ja s'ha esmentat a l'apartat 4.3

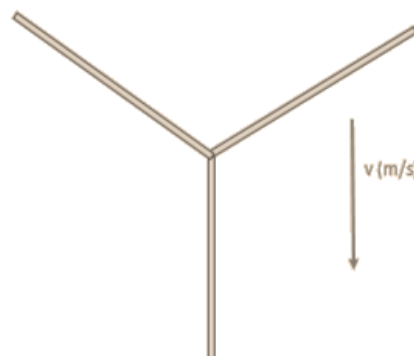



Figura 58 Vista lateral de l'helicòpter de paper

4.4.3 Anàlisis dels vídeos a partir del Tracker

Quan ja s'han filmat els vídeos, ja es pot passar a la següent part de l'experiment: la recollida de dades mitjançant el programari Tracker. La metodologia que s'ha de seguir per importar el vídeo en el programa fins a l'obtenció de les gràfiques, és similar amb els dos tipus de vídeos duts a terme (vista lateral i aèria), l'únic que varia és la interpretació final de les dades donades (que s'explicarà més endavant en els següents subapartats 4.4.3.1 Interpretació dels gràfics (vista aèria) i 4.4.3.2 Interpretació dels gràfics (vista lateral)).

A continuació es poden veure els passos que s'han de seguir per utilitzar correctament el Tracker (també es donen alguns consells tenint en compte la vista del vídeo):

1. Primer de tot s'obra el programari Tracker  (prèviament instal·lat) i s'importa el vídeo clicant a "**Archivo**" (**Archivo**) i, elegint el subapartat anomenat "**Abrir...**" (**Abrir...**). Llavors, s'obrirà una pestanya on s'haurà de buscar el vídeo filmat.

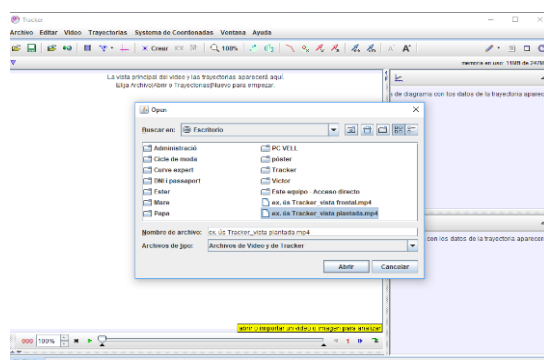

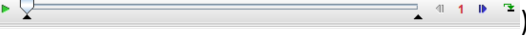



Figura 59 Importació del videoclip, en aquest cas anomenat ex. ús Tracker_vista aèria, al programari Tracker

2. Una vegada s'hagi inserit el vídeo, cal seleccionar el tros de vídeo que es vol analitzar. Per fer-ho, s'han de desplaçar les "**falques**" () que es troben en la barra de reproducció del vídeo (). La falca de l'esquerra es situaria en l'instant que l'helicòpter de paper surt de les mans i, la falca de la dreta, quan arriba a terra.
3. Després de seleccionar el tros de vídeo que s'investigarà, s'ha d'establir un **sistema de referència** per la recollida de dades, és a dir la coordenada (0, 0). Per realitzar-ho s'ha de prémer el següent botó , anomenat "**eje de coordenadas**". D'aquesta forma, apareixerà un eix de coordenades de color rosat. Aquest s'ha d'arrossegar i col·locar al punt zero escollit. En cas que el vídeo sigui des de la vista plantada, es situarà just al centre de l'enginy (on coincideixen les ales) i, si es tracta de la vista frontal, d'allà on inicialment surt el twister.

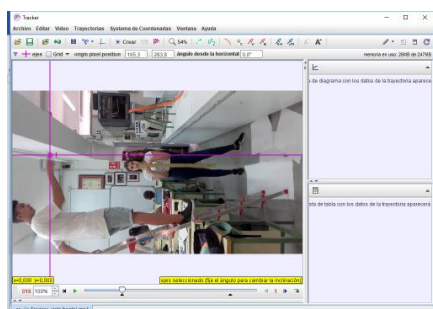


Figura 60 Col·locació de l'eix a l'inici de la caiguda

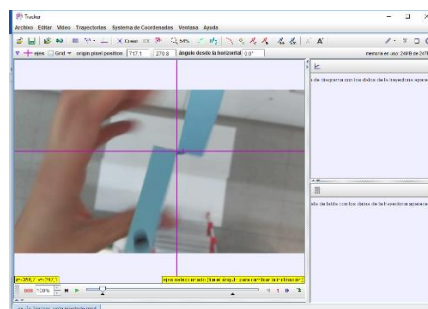


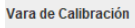


Figura 61 Col·locació de l'eix al centre de l'helicòpter de paper

4. Tot seguit, s'ha d'establir una mesura de referència (ja sigui un metre o u cordill). Per fer-ho es clica aquest botó  (que porta per nom “Herramienta de calibración”), després es clica “Nuevo”  i, s'escull el subapartat de “Vara de calibración” . D'aquesta manera, apareixerà una línia blava (si no és el cas es clica dues vegades Shift damunt del vídeo). En el vídeo filmat amb vista lateral aquesta s'ha d'arrossegar fins el metre (regle de 100cm) i col·locar-la de forma que: un dels extrems es trobi a la base del regle (0cm) i l'altre extrem a l'altre costat del regle (allà on marca 100cm). Finalment, s'escriu la llargada equivalent de la línia a la realitat en centímetres (100cm), prement i canviant el número que es troba al costat de la barra. En el vídeo gravat amb vista aèria, encara que realment no cal, es pot usar com a referència la distància que hi ha entre dues rajoles (en aquest cas 60cm), o bé posar el regle al terra. El procediment a seguir seria el mateix.

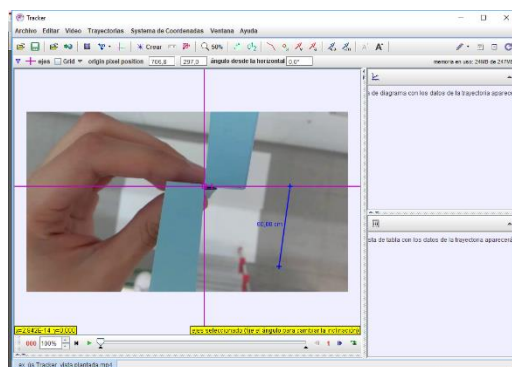


Figura 62 Establiment de la mesura de referència (60cm)

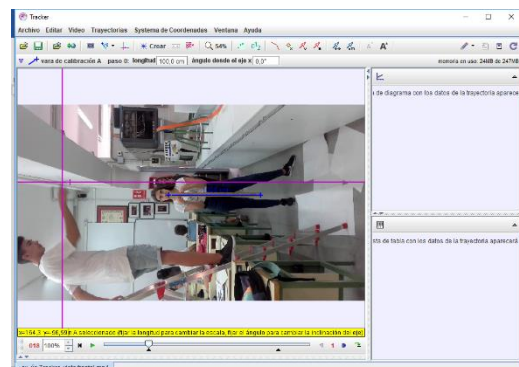




Figura 63 Establiment de la mesura de referència (100cm)

5. Una vegada establerts els paràmetres principals, ja es poden recollir les dades del vídeo. Primerament es va al boto “Crear” , i dels seus subapartats es clica “Masa Puntual” . Ara, es selecciona amb el botó dret del ratolí, mentre es prem la tecla “SHIFT” o “Bloq. Mayús”, la situació en l'espai de l'helicòpter de paper. En el cas del vídeo realitzat amb vista aèria s'anirà marcant una de les ales, i en el cas del vídeo amb vista lateral es marcarà el peu de l'helicòpter de paper.

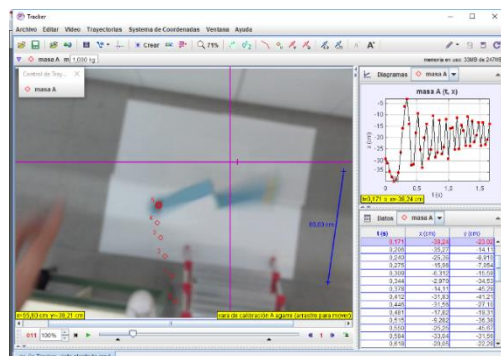


Figura 64 Establiment de les masses puntuals en els fotogrames escollits del vídeo amb vista aèria

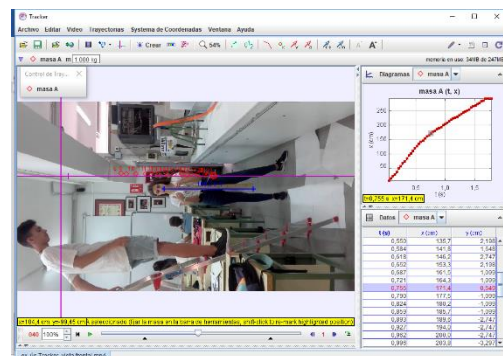




Figura 65 Establiment de les masses puntuals en els fotogrames escollits del vídeo amb vista lateral

6. Quan s'acabin de marcar tots els punts, a la dreta de la pantalla, sortirà una gràfica. Per veure els resultats que ens interessin per realitzar el nostre estudi, es clica el botó “Diagramas” , i s'elegeix el número “2” . D'aquesta forma podrem veure els gràfics y-t i x-t, dels resultats obtinguts.

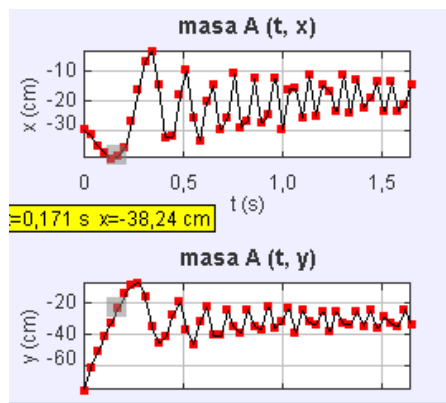


Figura 66 Gràfiques obtingudes del vídeo en vista aèria

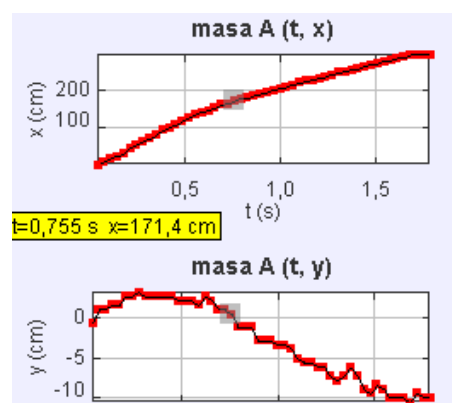


Figura 67 Gràfiques obtingudes del vídeo en vista lateral

Com ja s'ha dit anteriorment, la interpretació dels gràfics varia en funció de la amb la vista que s'ha dut a terme el vídeo (tal i com es pot apreciar en les anteriors figures). Vegeu a continuació les explicacions:

4.4.3.1 Interpretació dels gràfics (vista aèria)

En aquesta situació, la gràfica que es necessita és la y-t. Per veure la seva respectiva taula de dades, només cal fer doble clic damunt la gràfica y-t que es troba al marge dret de la pantalla, de forma que s'obri una pestanya semblant a aquesta:

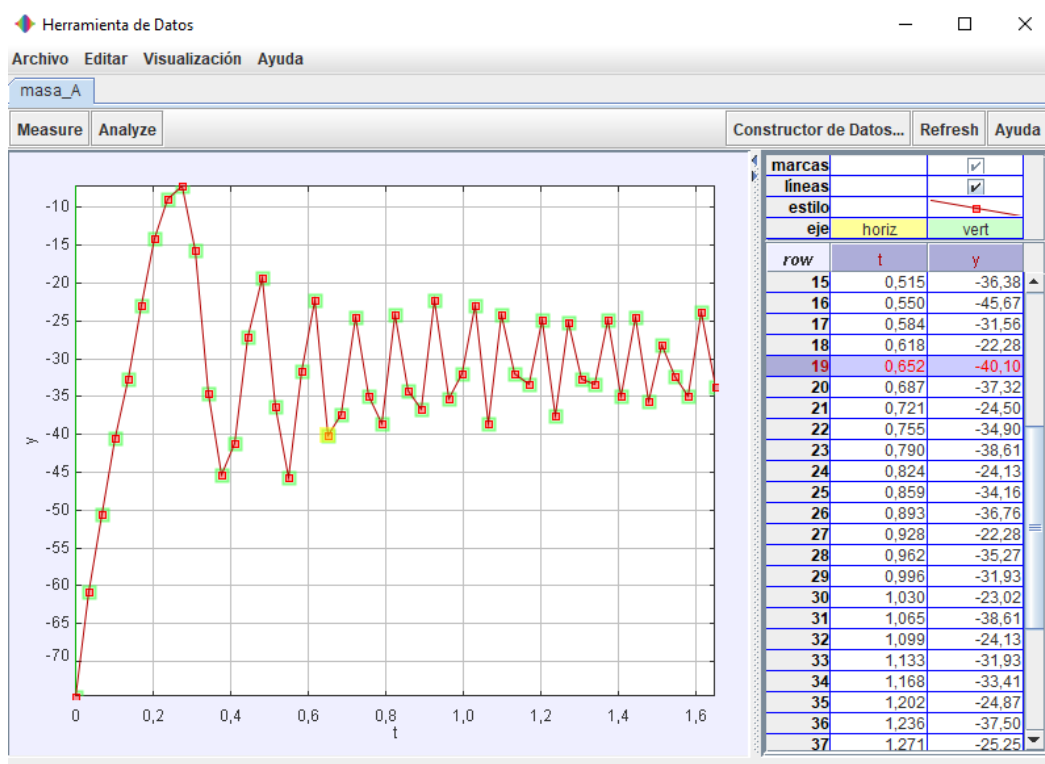


Figura 68 Gràfica i taula de dades dels resultats y-t

El que ens indiquen els pics d'aquesta gràfica són les voltes que ha realitzat l'helicòpter de paper, i el temps que ha tardat en fer-les. Això es deu, a la forma en què s'han pres les dades al Tracker, tal i com es mostra en la Figura 69:

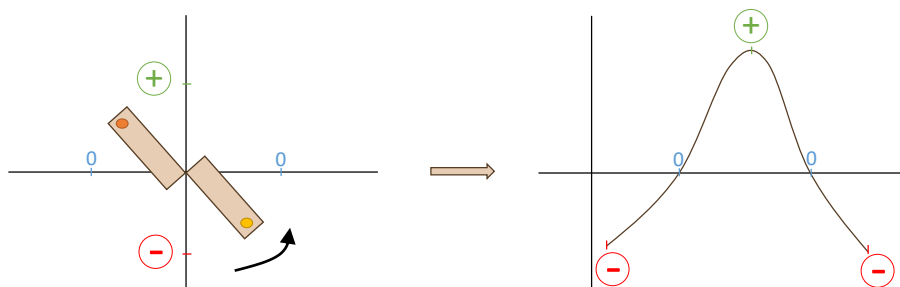


Figura 69 Interpretació de la gràfica y-t

Cada vegada que l'helicòpter de paper passa pels valor negatiu (-), significa que ha donat una volta. Per saber el període només caldrà consultar el temps que ha passat a la taula de dades des d'un valor negatiu a un altre.

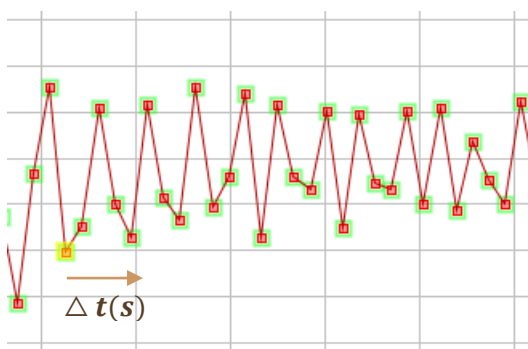


Figura 70 Període (T(s))

4.4.3.2 Interpretació dels gràfics (vista lateral)

En aquesta situació, la gràfica que es necessita és la x-t. Per veure la seva respectiva taula de dades, només cal fer doble clic damunt la gràfica x-t que es troba al marge dret de la pantalla, de forma que s'obri una pestanya semblant a aquesta:

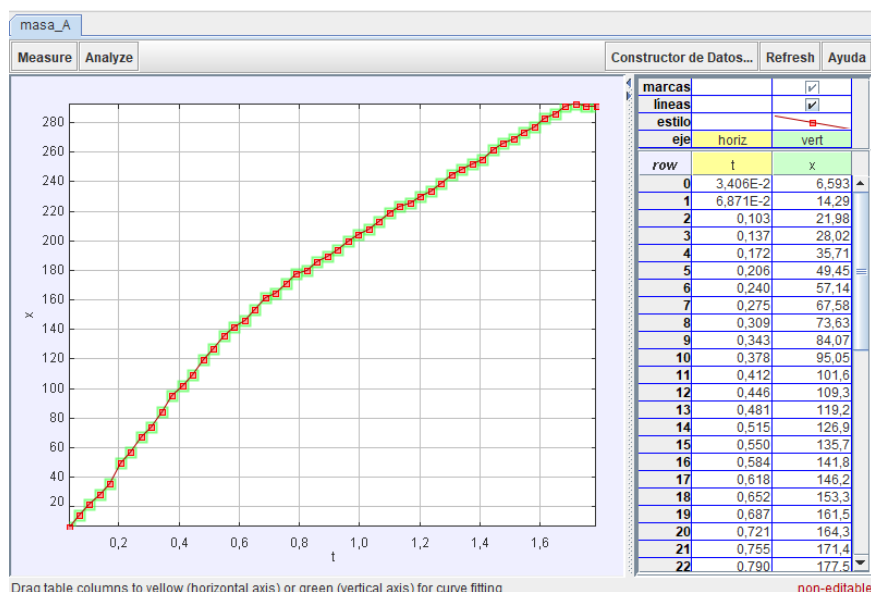


Figura 71 Gràfica i taula de dades dels resultats x-t

El que ens indica aquesta gràfica és la posició de l'helicòpter de paper en cada fotograma (val a dir que les últimes dades representen la distància total recorreguda, ja que són les que ens indiquen que l'helicòpter de paper ha arribat al terra).

Tal i com es pot veure en la Figura 71, la gràfica no té una mateixa pendent, sinó que en té dues. Aquestes representen els dos trams separats per una fase de transició, en la qual l'helicòpter de paper deixa de caure en caiguda lliure i comença a girar a velocitat constant.

Per tal de trobar la velocitat terminal (assumint que és desplaça amb un MRU en el segon tram), i assimilar el primer tram a una caiguda lliure¹², s'han de passar les dades corresponents al *Curve expert*, per tal de que aquest ens proporcioni l'equació de les seves respectives funcions (vegeu les explicacions en el següent apartat).

4.4.4 Traspàs de les dades al *Curve expert*

Seguint amb el que es deia en l'apartat anterior, el Curve Expert permet, a partir de dues variables, crear una gràfica amb la seva corresponent equació (ajustant-la a la seva corresponent funció).

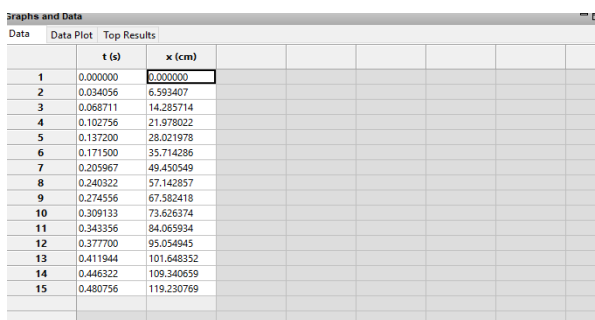
Si s'agafa d'exemplificació la taula de dades del vídeo de vista lateral de l'anterior apartat (vegeu la taula a continuació), amb l'ajuda de la gràfica es poden seleccionar els valors dels fotogrames que interessin de les dues fases que hi ha en la caiguda.

Fotogrames	t (s)	x (cm)
1	0,034	6,5
2	0,068	14,3
3	0,102	22,0
4	0,137	28,0
5	0,171	35,7
6	0,205	49,5
7	0,240	57,1
8	0,274	67,6
9	0,309	73,6
10	0,343	84,1
11	0,377	95,1
12	0,411	101,6
13	0,446	109,3
14	0,480	119,2
15	0,515	126,9
16	0,549	135,7
17	0,583	141,8
18	0,618	146,2
19	0,652	153,3
20	0,687	161,5
21	0,721	164,3

¹² El moviment del de l'helicòpter de paper en la primera fase no és caiguda lliure perquè hi ha la força de fricció de l'aire. El que passa és que quan la velocitat de caiguda no és massa gran, la força de fricció és petita i es pot assimilar una caiguda lliure.

22	0,755	171,4
23	0,789	177,5
24	0,824	180,2
25	0,858	185,7
26	0,892	189,6
27	0,927	194,0
28	0,961	200,0
29	0,995	203,8
30	1,030	207,7
31	1,064	213,2
32	1,099	218,7
33	1,133	223,1
34	1,168	225,8
35	1,202	229,7
36	1,236	233,5
37	1,270	239,0
38	1,305	244,5
39	1,339	248,4
40	1,373	251,6
41	1,408	254,9
42	1,442	261,5
43	1,476	265,9
44	1,511	268,7
45	1,545	273,6
46	1,580	276,9
47	1,614	283,0
48	1,648	285,7
49	1,682	291,2
50	1,717	292,9
51	1,751	291,2
52	1,786	291,2

Taula 1 Valors x-t de la caiguda d'un helicòpter de paper (exemple)



	t (s)	x (cm)
1	0.000000	0.000000
2	0.034056	6.593407
3	0.068711	14.285714
4	0.102756	21.978022
5	0.137200	28.021978
6	0.171500	35.714286
7	0.205967	49.430549
8	0.240322	57.142857
9	0.274556	67.582418
10	0.309133	73.626374
11	0.343356	84.065934
12	0.377700	95.054945
13	0.411944	101.648352
14	0.446322	109.340659
15	0.480756	119.230769

Figura 72 Transcripció de les dades al Curve expert

propietats de la taula de dades i la gràfica (com ara: nombre de decimals, nom de les variables, color, títol...) fent doble clic.

En aquest cas, pel primer tram de la caiguda de l'helicòpter¹³, es poden agafar els valors dels fotogrames 1 al 14 (i a més a més afegir la coordenada 0,0 perquè sigui més representatiu). Una vegada seleccionades les dades es transcriuen al Curve expert, tal i com es mostra en la Figura 72, obtenint així la respectiva gràfica (Figura 74). Si es vol, es poden ajustar les

¹³ Només es podrà assimilar la caiguda lliure als helicòpters de paper de poca massa i amb ales amb poca superfície

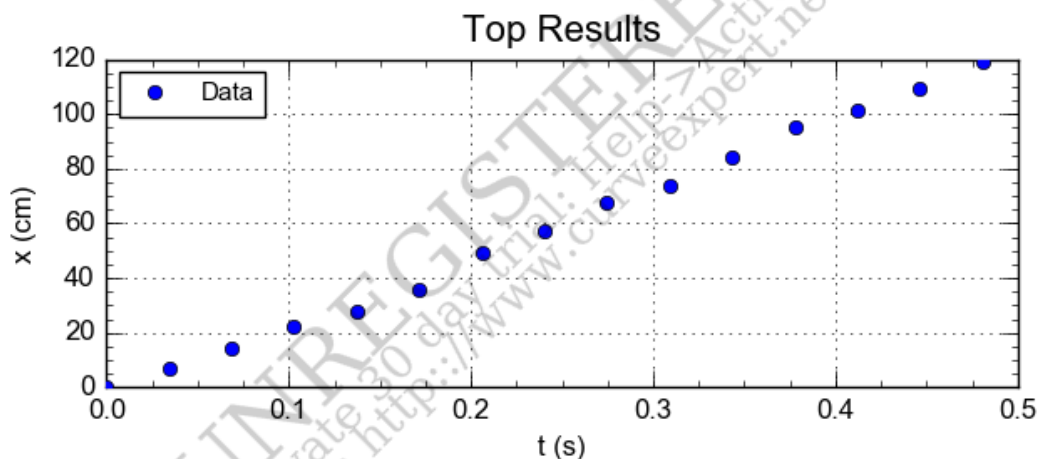


Figura 74 Obtenció de la gràfica x-t corresponent al primer tram de la caiguda de l'helicòpter de paper (vista frontal)

Ara només queda ajustar la gràfica a la seva respectiva funció, en aquest cas a una corba, és a dir, una funció polinòmica de segon grau. Per fer-ho, només cal clicar el botó [Calculate](#) i elegir l'opció [Nth-order Polynomial Fit...](#). D'aquesta forma s'obre una pestanya, on s'ha de marcar el numero 2 (per indicar que és de segon grau) i deixar en blanc l'opció de forçar la gràfica a través de l'origen.

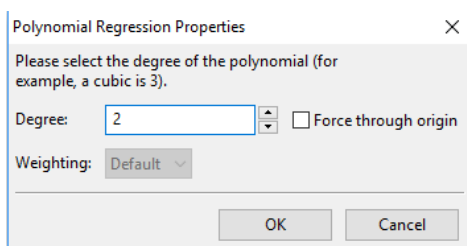


Figura 73 Pestanya corresponent a l'ajustament de la gràfica a una funció

Finalment, es prem el boto dret del ratolí i s'elegeix l'opció [Autoannotate](#). D'aquesta forma, s'obté a banda de la gràfica, la seva equació i les seves respectives incògnites.

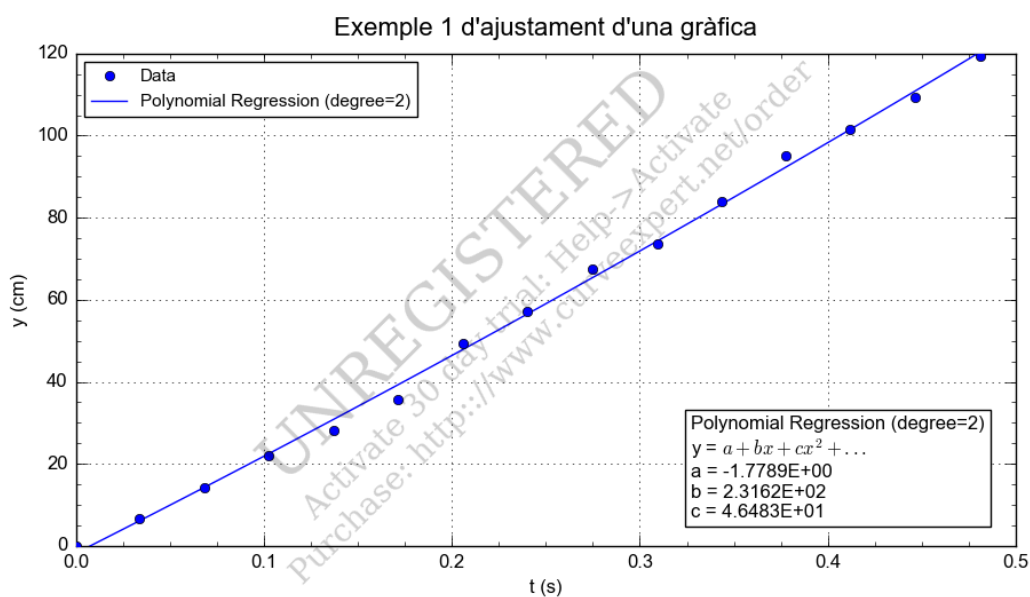


Figura 75 Obtenció de l'equació (i les seves respectives incògnites) corresponent al primer tram de la caiguda de l'helicòpter


Polynomial Regression (degree=2)
 $y = a + bx + cx^2 + \dots$
 $a = -1.7789E+00$
 $b = 2.3162E+02$
 $c = 4.6483E+01$

Aquestes dades són les que interessen per el anàlisis de la caiguda de l'helicòpter de paper en el primer tram, ja que s'ajusten i assimilen a l'equació de la caiguda lliure:

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2$$

$$\leftrightarrow y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \quad (s) \\ a = y_0 \quad (cm) \\ b = v_0 \quad (cm/s) \\ c = \frac{g}{2} \quad (cm/s^2) \end{array} \right.$$

D'altra banda, respecte al segon tram de la caiguda de l'helicòpter de paper, en aquest cas es poden agafar d'exemple els valors dels fotogrames 21 al 48 (Taula 1). Tal i com s'ha fet amb el primer tram, es transcriuen les dades al Curve expert i s'obté la seva gràfica. Tot i això, per ajustar la gràfica ara cal clicar el següent botó , i en la pestanya emergent escollir l'opció default (tampoc s'ha de seleccionar l'opció de forçar la gràfica a través de l'origen). Finalment es clica "Autonnotate" (com ja s'ha ensenyat prèviament), i s'obté la següent figura:

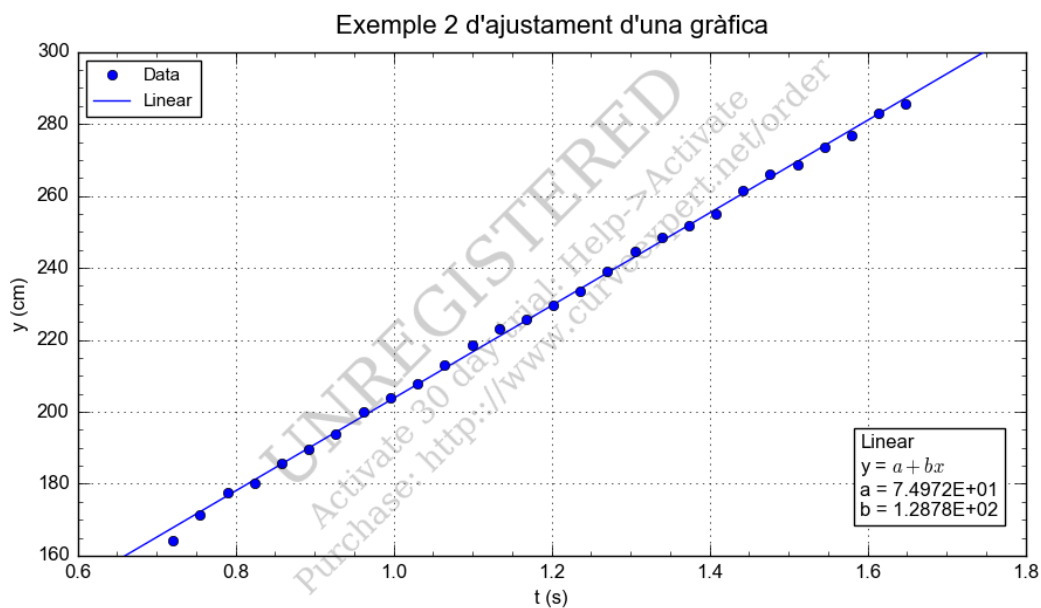


Figura 76 Obtenció de l'equació (i les seves respectives incògnites) corresponent al segon tram de la caiguda de l'helicòpter

Linear
 $y = a + bx$
 $a = 7.4972E+01$
 $b = 1.2878E+02$

En aquest cas, les dades de l'equació permeten saber la velocitat terminal de la caiguda de l'enginy, ja que l'equació lineal s'ajusta a la formula del moviment rectilini uniforme (MRU):

$$y = a + b \cdot x \quad \leftrightarrow \quad y = y_0 + v \cdot t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \quad (s) \\ a = y_0 \quad (cm) \\ b = v_{terminal} \quad (cm/s) \end{array} \right.$$

4.5. OBSERVACIÓ DELS RESULTATS, ANÀLISI I DISCUSSIÓ

A continuació es mostren tots i cadascun dels resultats donats en les proves realitzades a banda de les conclusions parcials extretes.

Per tal de classificar millor els resultats, s'han organitzat segons la variable independent de l'helicòpter de paper i, dins d'aquest apartat general, cadascun dels helicòpters de paper que formen el conjunt. De cadascun d'aquests, com ja s'ha anat dient al llarg del treball, es pot trobar l'estudi (és a dir, cadascuna de les rèpliques filmades) i valor de la seva velocitat terminal i angular i $T(s)$ i, finalment les gràfiques que han permès extreure conclusions del tot l'anàlisi realitzat.

A continuació trobareu la influència que produeixen les següents variables en els diferents helicòpters de paper:

- la massa (m),
- l'angle d'obertura de les ales (α),
- el radi de gir (R) tenint en compte el centre de masses de les ales (\cdot),
- la superfície de l'ala ($S=W \cdot L$):
 - o la longitud de l'ala (L);
 - o l'amplada de l'ala (W),

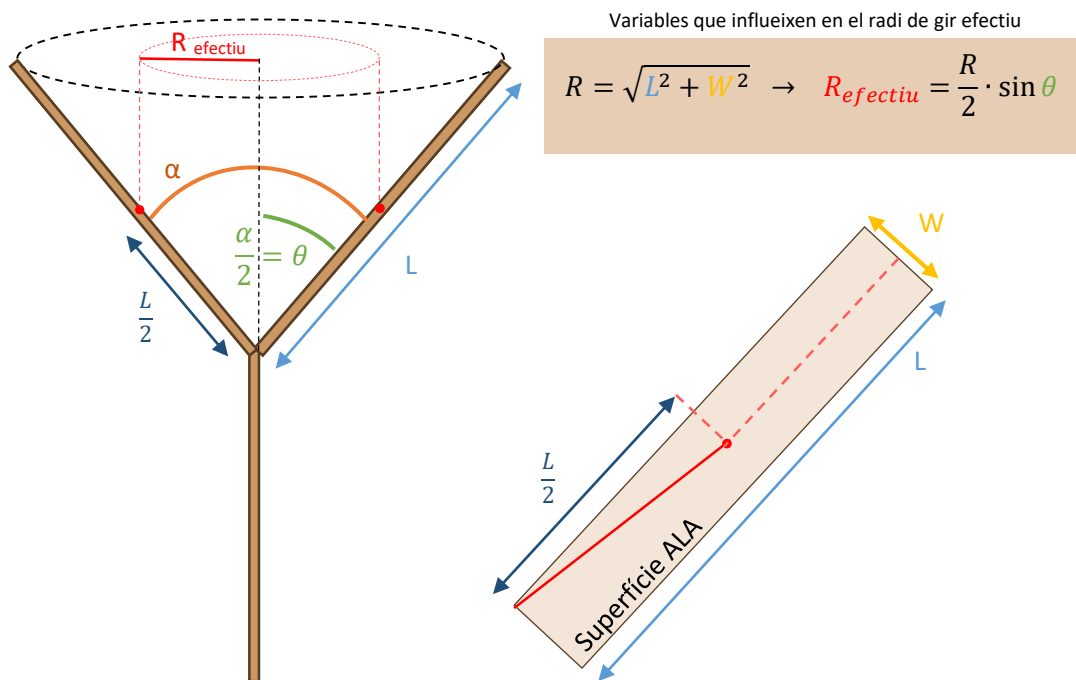


Figura 77 Representació gràfica de les variables que afecten al vol de l'helicòpter de paper

4.5.1 Variació de la massa

4.5.1.1 Helicòpters de paper utilitzats

Per tal d'estudiar la influència de la massa en la caiguda d'un helicòpter de paper i en el $T(s)$, s'han preparat 4 helicòpters de paper de massa diferent, però amb les altres variables iguals, és a dir:

$$T = f(m)_{\alpha, R, S}$$

Els valors d'aquestes constants són:

- $S = L \cdot W = 7,0 \text{ cm} \cdot 1,5 \text{ cm} = 10,5 \text{ cm}^2$
- $\alpha = 120^\circ$
- $R_{\text{efectiu}} = \frac{(\sqrt{L^2 + W^2})}{2} \cdot \sin \theta = \frac{(\sqrt{0,07^2 + 0,015^2})}{2} \cdot \sin 60 = 0,031 \text{ m} = 3,1 \text{ cm}$

Els helicòpters de paper tenen les següents masses:

1. $m_1 = 0,77 \text{ g}$ (sense clip)
2. $m_2 = 1,21 \text{ g}$ (1 clip)
3. $m_3 = 1,65 \text{ g}$ (2 clips)
4. $m_4 = 2,11 \text{ g}$ (3 clips)

Tal i com es pot veure en la següent figura (encara que falta el primer helicòpter de paper) la diferència de massa s'ha assolit amb la incorporació de clips a la base. D'aquesta forma l'increment de massa en ordre creixent o decreixent és aproximadament igual, ja que tots els clips usats pesen al voltant de 0'44 g.

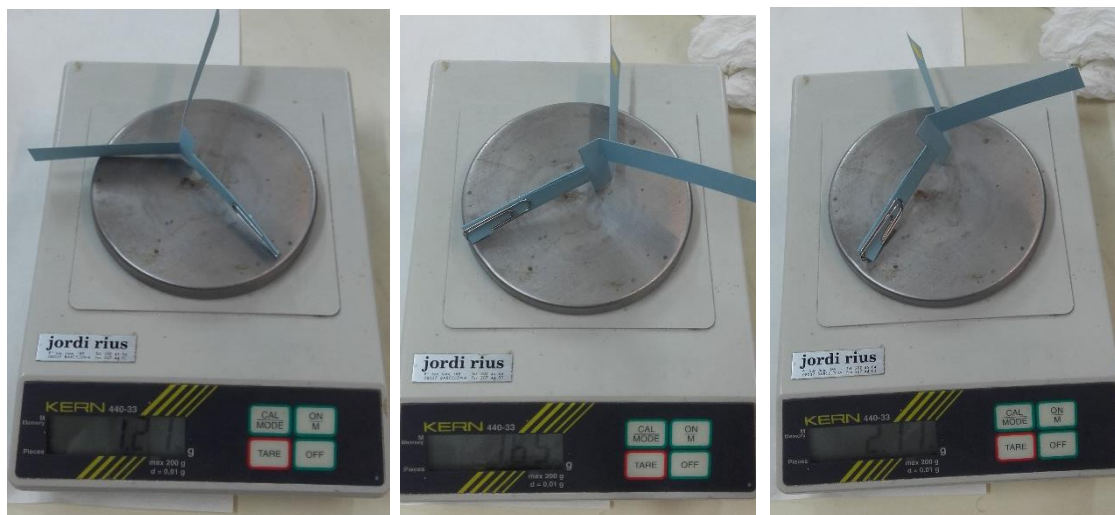


Figura 78 Mesura de la massa dels helicòpters de paper (d'esquerra a dreta: 1,21g, 1,65g i 2,11g)

4.5.1.2 Velocitat angular

A partir dels vídeos realitzats als diversos helicòpters de paper de diferents masses, s'han pogut determinar les següents velocitats angulars i períodes, en el tram que es pot suposar que el seu moviment és circular uniforme, per cada cas (requadres blaus). També s'ha incorporat més endavant en aquest mateix apartat, una representació gràfica del moviment autogiratori de cada helicòpter de paper, per tal de poder fer un anàlisi comparatiu. La resta de dades obtingudes a partir dels programaris i els càlculs realitzats abans d'adquirir les dades que es mostren a continuació es troben a l'apartat 1.1 de l'ANNEX 2.

1) Helicòpter de paper de 0,77g

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (0,77g), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,110s$ Vídeo 2: $T = 0,103s$ Vídeo 3: $T = 0,103s$	}	$T = (0,105 \pm 0,003)s$
--	---	--------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,105} = 59,8 \text{ rad/s}$$

2) Helicòpter de paper de 1,21g

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (1,21g), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,103s$ Vídeo 2: $T = 0,103s$ Vídeo 3: $T = 0,103s$ Vídeo 4: $T = 0,103s$	}	$T = 0,103s$
--	---	--------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,103} = 61,0 \text{ rad/s}$$

3) Helicòpter de paper de 1,65g

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (1,65g), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,103s$ Vídeo 2: $T = 0,103s$ Vídeo 3: $T = 0,103s$	}	$T = 0,103s$
--	---	--------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,103} = 61,0 \text{ rad/s}$$

4) Helicòpter de paper de 2,11g

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (2,11g), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

<p>Vídeo 1: $T = 0,069 \text{ s}$</p> <p>Vídeo 2: $T = 0,103 \text{ s}$</p> <p>Vídeo 3: $T = 0,086 \text{ s}$</p>	}	$T = (0,086 \pm 0,034) \text{ s}$
---	---	-----------------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,086} = 73,1 \text{ rad/s}$$

Com ja s'ha mencionat en la pàgina anterior, s'ha seleccionat per cada helicòpter de paper un dels seus vídeos per tal de poder fer una anàlisi comparativa de les seves gràfiques. Vegeu tot seguit:

a) Les corresponents gràfiques y-t del moviment autogiratori de cadascun dels helicòpters de paper (que indiquen el nombre de voltes d'una de les ales):

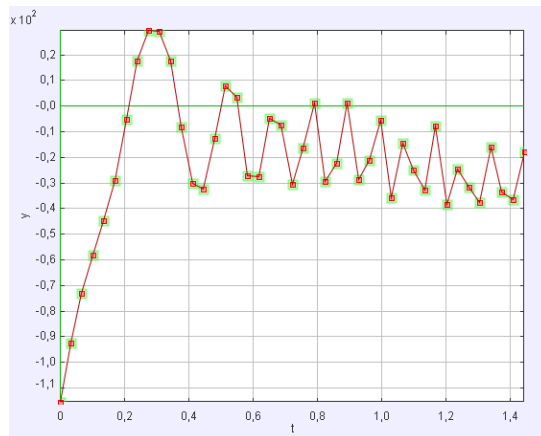


Figura 79 Gràfica y-t (vídeo 2 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 0,77g

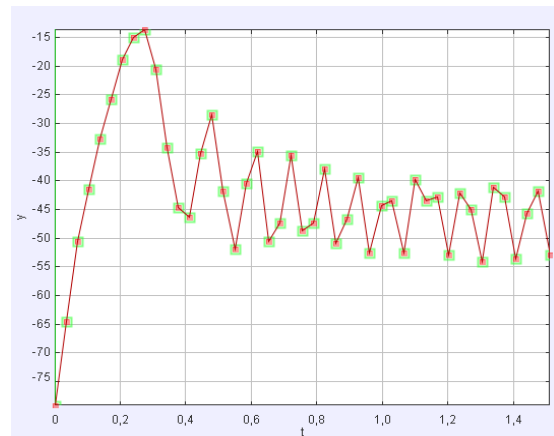


Figura 80 Gràfica y-t (vídeo 2 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 1,21g

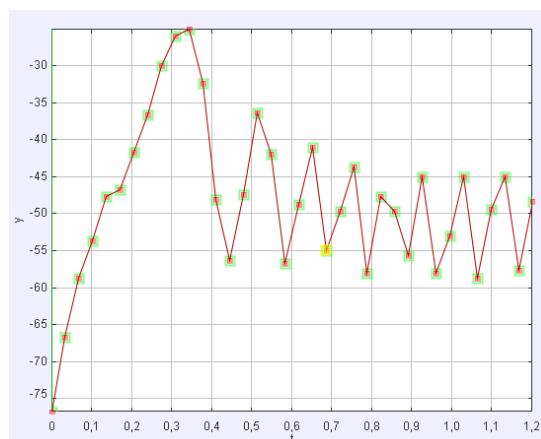


Figura 81 Gràfica y-t (vídeo 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 1,65g

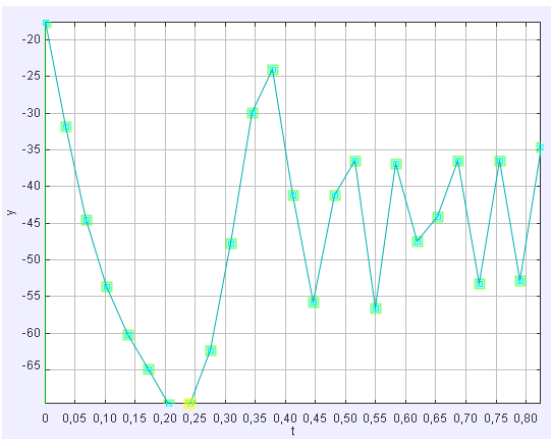


Figura 82 Gràfica y-t (vídeo 3 vista plantada) de l'helicòpter de paper de 2,11g

En aquestes gràfiques s'observen dos trams: el primer consta de dues voltes de major període que les posteriors (dins de l'interval dels primers 0,6 i 0,8s); i, el segon, en canvi, mostra un major nombre de voltes però de període més petit i constant. Així doncs, tots els helicòpters comencen a girar amb un període constant aproximadament en un mateix interval de temps.

b) Les corresponents gràfiques T-t (període-temps de descens) de cada helicòpter de paper:

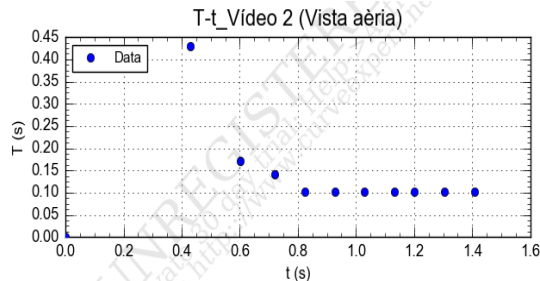


Figura 83 T-t_ (Vídeo 2 Vista aèria) de l'helicòpter de paper de 0,77g

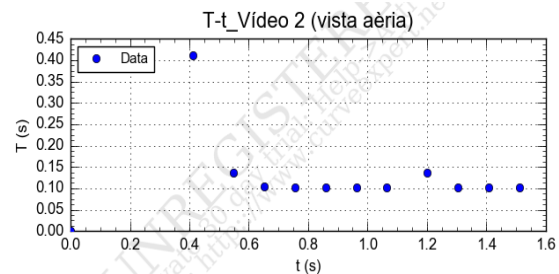


Figura 84 T-t_ (Vídeo 2 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 1,21g

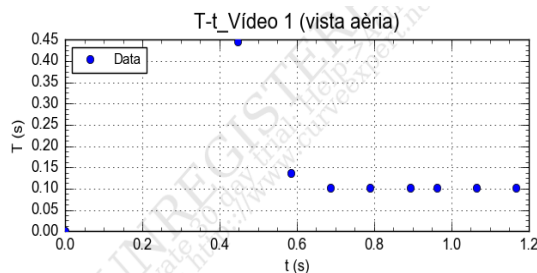


Figura 85 T-t_ (Vídeo 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 1,65g

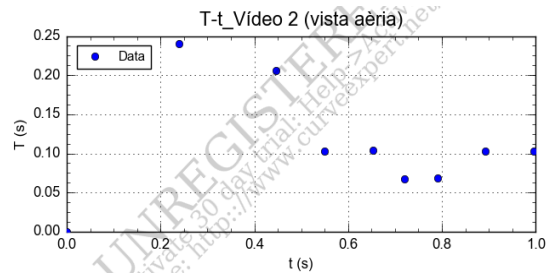


Figura 86 T-t_ (Vídeo 2 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 2,11g

Aquestes gràfiques corroboren que els helicòpters de paper assoleixen un període constant dins l'interval de temps de 0,6-0,8s.

A més a més, també es destaca que els tres primers helicòpters de paper mantenen un mateix període constant (al voltant dels 0,103s), a diferència del de 2,11g de massa, període del qual és menor (al voltant dels 0,086s) i més inestable.

Aquestes gràfiques també mostren, a partir de la relació $w = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{rad}{s} \right)$, que per a un menor període, més gran és la velocitat angular i, per tant, més ràpid gira l'enginy. Així doncs, l'helicòpter de paper que més ràpid gira és el de 2,11g (el de major massa), encara que de forma inestable.

Tal i com es pot veure en els anteriors resultats i en la següent gràfica, la velocitat angular (en rad/s) de rotació de l'helicòpter de paper augmenta amb la seva massa (en grams) segons l'equació polinòmica de tercer grau següent:

$$w = 17,7 - 110,2m - 90,7m^2 + 24,1m^3$$

Cal destacar, (mitjançant l'observació de la gràfica) que a partir dels 1,65 g de massa la velocitat angular augmenta de una manera no lineal

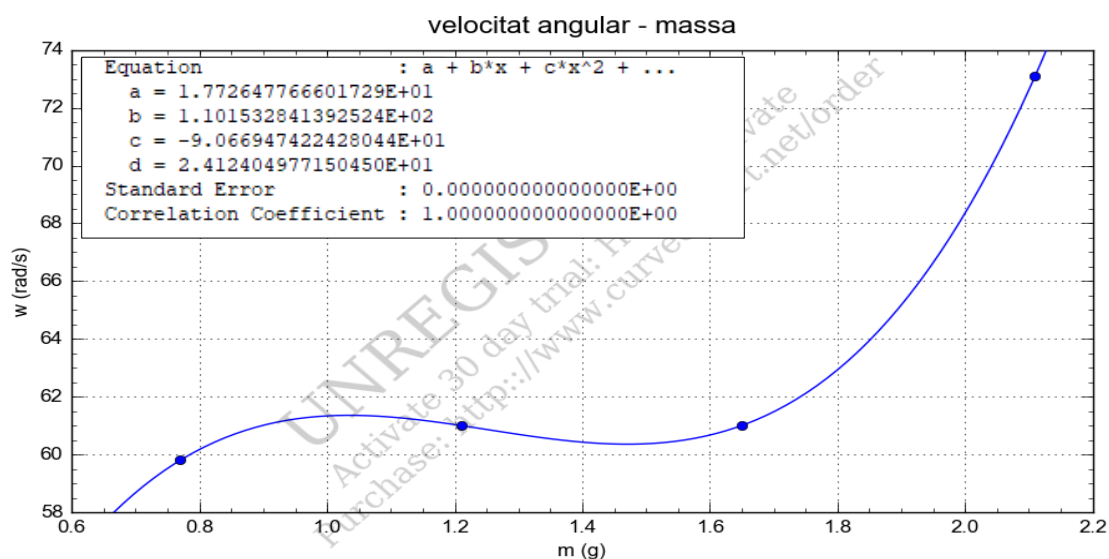


Figura 87 Velocitat angular en relació amb la massa (resultats ajustats a una regressió polinòmica de tercer grau)

4.5.1.3 Velocitat terminal

A partir dels vídeos realitzats als diversos helicòpters de paper de diferents masses, s'han pogut determinar les següents velocitats terminals per cada cas (requadres blaus). També s'ha incorporat més endavant en aquest mateix apartat, una representació gràfica del descens de cada helicòpter de paper, per tal de poder fer un anàlisi comparatiu. La resta de dades obtingudes a partir dels programaris i els càlculs realitzats abans d'adquirir les dades que es mostren a continuació es troben a l'apartat 1.2 de l'ANNEX 2.

1) Helicòpter de paper de 0,77g

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (0,77g), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,10 \text{ m/s}$	}	$v = (1,06 \pm 0,02) \text{ m/s}$
Vídeo 2: $v = 1,03 \text{ m/s}$		
Vídeo 3: $v = 1,06 \text{ m/s}$		

2) Helicòpter de paper de 1,21g

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (1,21g), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,30 \text{ m/s}$	}	$v = (1,29 \pm 0,01) \text{ m/s}$
Vídeo 2: $v = 1,30 \text{ m/s}$		
Vídeo 3: $v = 1,27 \text{ m/s}$		

3) Helicòpter de paper de 1,65g

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (1,65g), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,47 \text{ m/s}$	}	$v = (1,49 \pm 0,01) \text{ m/s}$
Vídeo 2: $v = 1,51 \text{ m/s}$		
Vídeo 3: $v = 1,49 \text{ m/s}$		

4) Helicòpter de paper de 2,11g

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (2,11g), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,67 \text{ m/s}$

Vídeo 2: $v = 1,67 \text{ m/s}$

Vídeo 3: $v = 1,60 \text{ m/s}$

$$v = (1,65 \pm 0,03) \text{ m/s}$$

Com ja s'ha mencionat anteriorment, s'ha seleccionat per cada helicòpter de paper un dels seus vídeos per tal de poder fer una anàlisi comparativa de les seves gràfiques. Vegeu tot seguit:

a) Les corresponents gràfiques x-t del moviment descendent de cada helicòpter de paper:

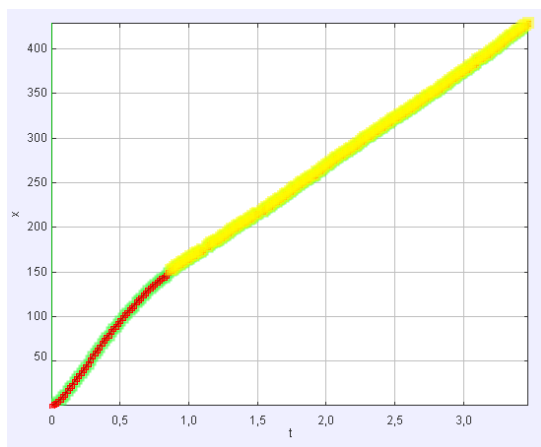


Figura 88 Gràfica x-t (vídeo 3 vista lateral) de l'helicòpter de paper de 0,77g

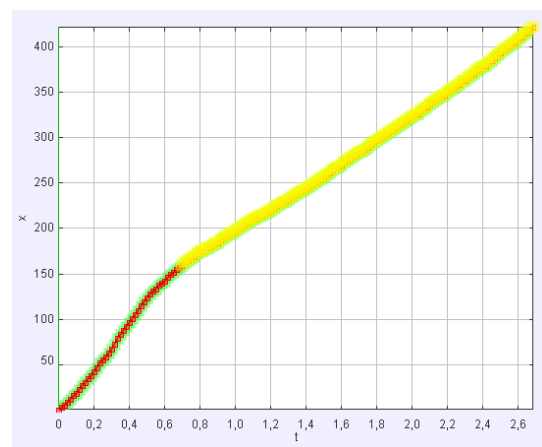


Figura 89 Gràfica x-t (vídeo 1 vista lateral) de l'helicòpter de paper de 1,21g

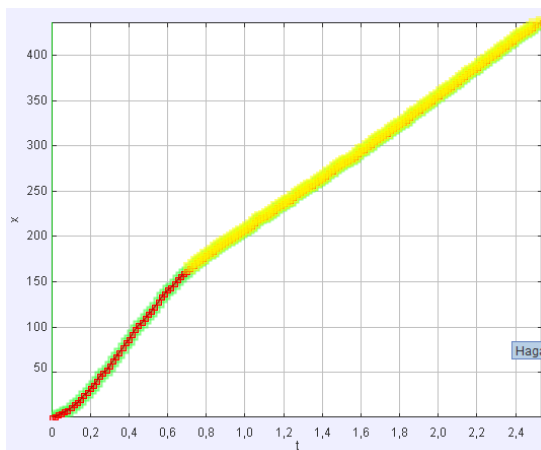


Figura 90 Gràfica x-t (vídeo 3 vista lateral) de l'helicòpter de paper de 1,65g

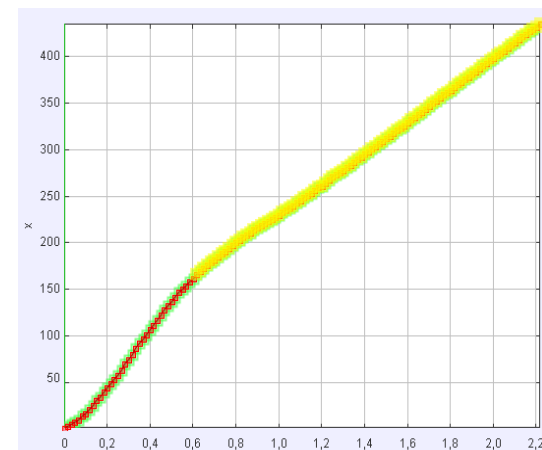


Figura 91 Gràfica x-t (vídeo 2 vista lateral) de l'helicòpter de paper de 2,11g

En aquestes gràfiques s'observa un canvi de velocitat, que com ja s'ha anat dient al llarg del treball es divideix en dos trams: el primer s'assimila a una caiguda lliure i, el segon, al període en el qual l'helicòpter assolix la seva velocitat terminal.

Comparativament s'observa que els quatre helicòpters assolixen la velocitat terminal en un mateix interval de temps (aproximadament entre 0,6 i 0,8s) i, havent recorregut aproximadament la mateixa distància (150 cm).

D'altra banda, si s'examina el temps total que els diferents helicòpters de paper tarden en recórrer una mateixa distància (entre 400 i 430 cm), s'aprecia que a mesura que augmenta la massa, l'interval de temps és menor. Per tant, es pot determinar que com més massa té un helicòpter menys tarda en recórrer una determinada distància.

Pel que fa a la pendent del segon tram de les gràfiques, es veu que a mesura que augmenta la massa dels helicòpters aquesta s'agreuja, és a dir, té major inclinació. La pendent de la recta es correspon amb la velocitat terminal (tal i com es pot veure en l'apartat b) següent), així doncs també es pot afirmar que per una massa més gran (i totes les altres característiques iguals), la velocitat terminal que assolix un helicòpter de paper és major.

b) Les respectives gràfiques x-t i equacions de la gràfica corresponents al tram on l'helicòpter de paper cau amb una velocitat constant

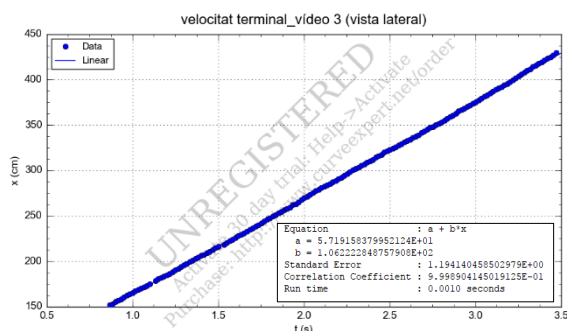


Figura 92 Gràfica x-t (video 3 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister de 0,77g

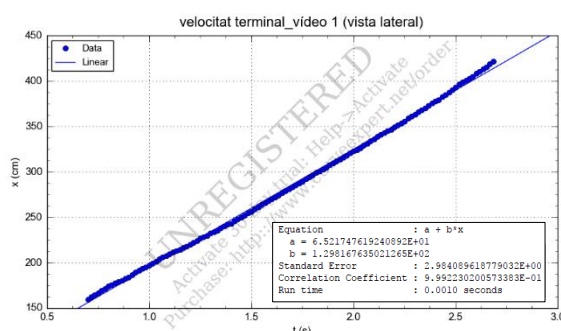


Figura 93 Gràfica x-t (video 1 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister de 1,22g

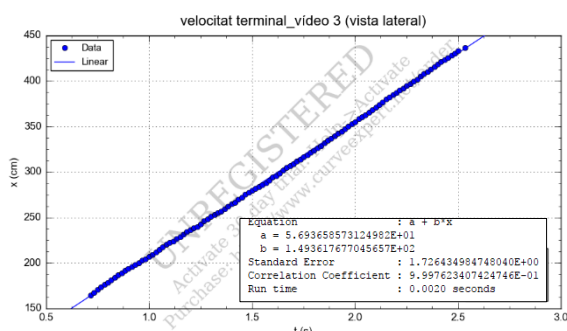


Figura 94 Gràfica x-t (video 3 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister de 1,65g

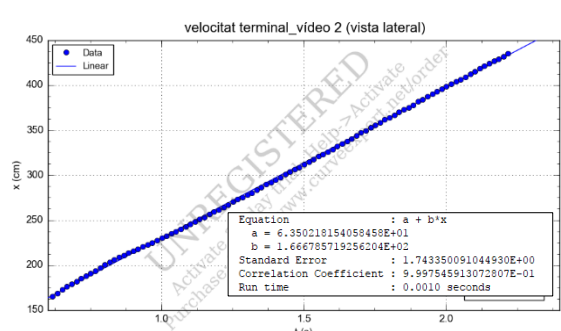


Figura 95 Gràfica x-t (video 2 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister de 2,11g

Tal i com es pot veure en els anteriors resultats i en la següent gràfica (Figura 97), la velocitat terminal (en m/s) de descens de l'helicòpter de paper augmenta amb la seva massa (en g) segons l'equació polinòmica de segon grau següent:

$$v = 0,559 + 0,725m - 0,0986m^2$$

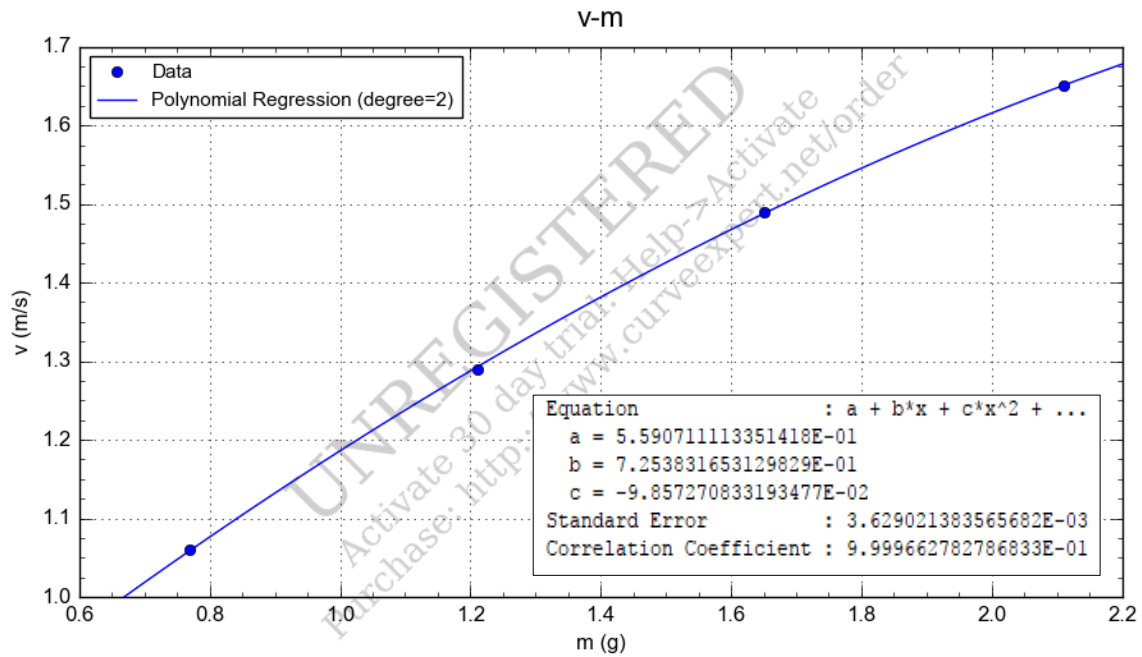


Figura 97 Resultats obtinguts ajustats a una regressió polinàmica de segon grau

D'altra banda, s'ha comprovat que hi ha una dependència lineal entre la massa i la velocitat terminal al quadrat. L'equació que relaciona les dues variables és la següent:

$$v^2 = 0,21 + 1,20m$$

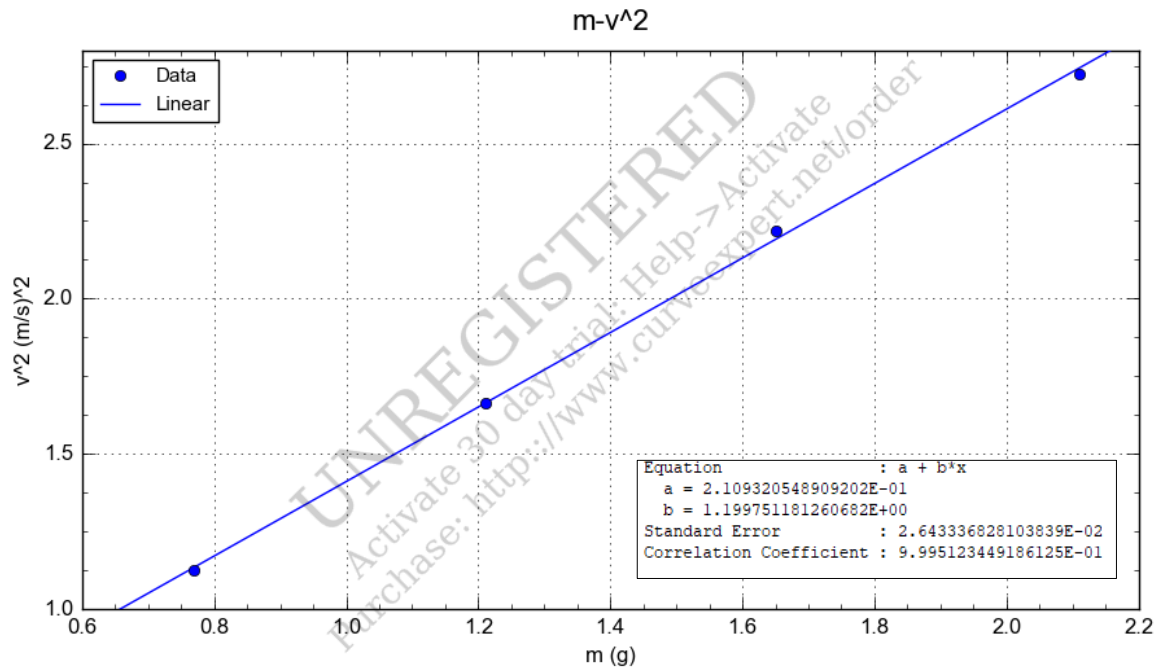


Figura 96 Relació entre la massa i la velocitat terminal al quadrat

Aquesta dependència entre la massa i la velocitat terminal al quadrat igualment justifica que la força de l'aire depengui també de la velocitat terminal al quadrat, tal i com es pot veure més endavant en l'apartat 7 (7. DETERMINACIÓ EXPERIMENTAL DEL COEFICIENT AERODINÀMIC).

4.1.5.4 Relació entre la velocitat terminal i l'angular

A continuació es mostren totes les dades obtingudes en referència als helicòpters de paper de diferent massa:

Helicòpter de paper	Massa (m)	Longitud ala (L)	Amplada ala (W)	Angle d'obertura (α)	Angle respecte la vertical (θ)
1	0,77g	0,070 m	0,015 m	120°	60°
2	1,21g	0,070 m	0,015 m	120°	60°
3	1,65g	0,070 m	0,015 m	120°	60°
4	2,11g	0,070 m	0,015 m	120°	60°

Taula 2 Característiques dels helicòpters de paper de diferent massa

Helicòpter de paper	$R = \sqrt{L^2 + W^2}$	$\frac{R}{2}$	$R_{efectiva} = \frac{R}{2} \cdot \sin \theta$
1	0,072 m	0,036 m	0,031 m
2	0,072 m	0,036 m	0,031 m
3	0,072 m	0,036 m	0,031 m
4	0,072 m	0,036 m	0,031 m

Taula 3 Característiques dels helicòpters de paper de diferent massa

Helicòpter de paper	T (s)	ω (rad/s)	Velocitat terminal ($v_{terminal}$)
1	0,105 s	59,7 rad/s	1,06 m/s
2	0,103 s	61,0 rad/s	1,29 m/s
3	0,103s	61,0 rad/s	1,49 m/s
4	0,086 s	73,1 rad/s	1,65 m/s

Taula 4 Resultats obtinguts dels helicòpters de paper de diferent massa

A partir dels resultats obtinguts s'observa que tant la velocitat angular com la velocitat terminal de l'helicòpter de paper augmenten amb un increment de massa.

A més a més, comparativament s'observa que els quatre helicòpters (1 al 4) de paper assoleixen la velocitat terminal i angular constants en un mateix interval de temps (aproximadament entre 0,6 i 0,8s).

4.5.2 Variació de l'angle d'obertura

4.5.2.1 Helicòpters de paper utilitzats

Per tal d'estudiar la influència de l'angle d'obertura en la caiguda d'un helicòpter de paper i $T(s)$, s'han preparat 6 helicòpters de paper d'obertura diferent, però amb les altres variables iguals (a excepció del radi de gir, ja que l'angle d'obertura hi influeix, tal com ja s'ha mostrat en l'equació $R_{efectiu} = \frac{R}{2} \cdot \sin \theta$), és a dir:

$$T = f(\alpha)_{m,s}$$

Els valors d'aquestes constants són:

- $S = L \cdot W = 7,0 \text{ cm} \cdot 1,5 \text{ cm} = 10,5 \text{ cm}^2$
- $m = 0,79 \text{ g}$

Els helicòpters de paper tenen els següents angles d'obertura i els següents radis:

- | | |
|-----------------------------|--|
| 1. $\alpha_5 = 180^\circ$ | $R_{5 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{7,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 3,6 \text{ cm}$ |
| 2. $\alpha_6 = 150^\circ$ | $R_{6 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{7,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 3,5 \text{ cm}$ |
| 3. $\alpha_7 = 120^\circ$ | $R_{7 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{7,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 3,1 \text{ cm}$ |
| 4. $\alpha_8 = 90^\circ$ | $R_{8 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{7,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 2,5 \text{ cm}$ |
| 5. $\alpha_9 = 60^\circ$ | $R_{9 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{7,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 1,8 \text{ cm}$ |
| 6. $\alpha_{10} = 30^\circ$ | $R_{10 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{7,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 0,9 \text{ cm}$ |

Tal i com es pot veure en la següent figura la diferència d'obertura s'ha assolit amb la modificació del plec que uneix les ales amb el peu i amb l'ajuda d'un transportador d'angles. L'increment de l'angle en ordre creixent o decreixent és de 30° .

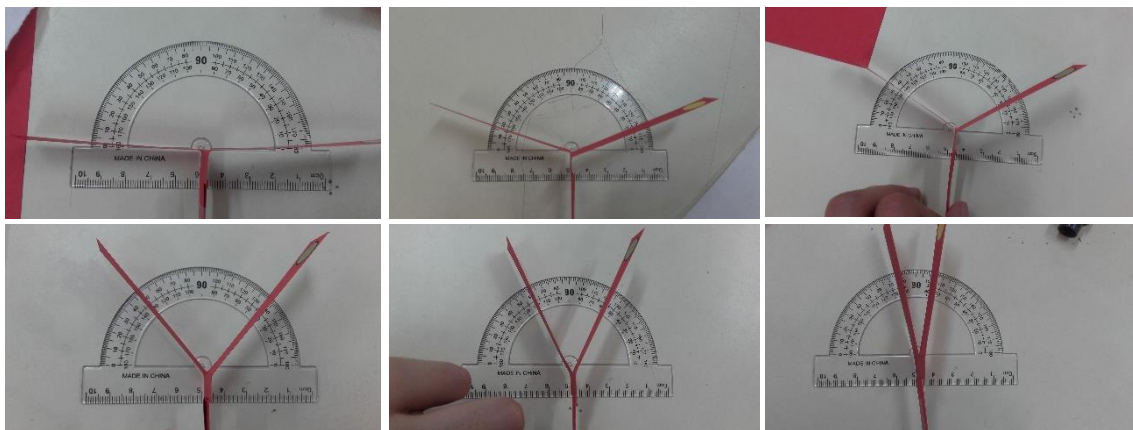


Figura 98 Mesura de l'angle d'obertura dels helicòpters de paper, a la fila de dalt s'hi troben d'esquerra a dreta els helicòpters de 180° , 150° i 120° i, a la fila de baix, també d'esquerra a dreta, els helicòpters de 90° , 60° i 30° .

4.5.2.2 Velocitat angular

A partir dels vídeos realitzats als diversos helicòpters de paper de diferents angles d'obertura, s'han pogut determinar les següents velocitats angulars i períodes, en el tram que es pot suposar que el seu moviment és circular uniforme, per cada cas (requadres taronges). També s'ha incorporat més endavant en aquest mateix apartat, una representació gràfica del moviment autogiratori de cada helicòpter de paper, per tal de poder fer un anàlisi comparatiu. La resta de dades obtingudes a partir dels programaris i els càlculs realitzats abans d'adquirir les dades que es mostren a continuació es troben a l'apartat 2.1 de l'ANNEX 2.

1) Helicòpter de paper de 180º d'obertura

A partir de les experimentacions realitzades amb aquest angle d'obertura (180º), s'ha determinat que l'helicòpter no segueix un moviment descendent estable i, que per tant, no es pot establir ni el seu període ni la seva velocitat angular ja que en aquest no existeix un tram on es pugui suposar que el seu moviment és circular uniforme

2) Helicòpter de paper de 150º d'obertura

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (150º d'obertura), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,100 \text{ s}$ Vídeo 2: $T = 0,109 \text{ s}$ Vídeo 3: $T = 0,100 \text{ s}$	}	$T = (0,103 \pm 0,004) \text{ s}$
---	---	-----------------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,103} = 61,0 \text{ rad/s}$$

3) Helicòpter de paper de 120º d'obertura

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (120º d'obertura), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,093 \text{ s}$ Vídeo 2: $T = 0,093 \text{ s}$ Vídeo 3: $T = 0,092 \text{ s}$	}	$T = (0,093 \pm 0,0003) \text{ s}$
---	---	------------------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,093} = 67,6 \text{ rad/s}$$

4) Helicòpter de paper de 90º d'obertura

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (90º d'obertura), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,087 \text{ s}$ Vídeo 2: $T = 0,083 \text{ s}$ Vídeo 3: $T = 0,084 \text{ s}$	}	$T = (0,085 \pm 0,002) \text{ s}$
---	---	-----------------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,085} = 73,9 \text{ rad/s}$$

5) Helicòpter de paper de 60º d'obertura

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (60º d'obertura), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,073 \text{ s}$ Vídeo 2: $T = 0,070 \text{ s}$ Vídeo 3: $T = 0,069 \text{ s}$	}	$T = (0,071 \pm 0,002) \text{ s}$
---	---	-----------------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,071} = 88,5 \text{ rad/s}$$

6) Helicòpter de paper de 30º d'obertura

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (30º d'obertura), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,061 \text{ s}$ Vídeo 2: $T = 0,060 \text{ s}$ Vídeo 3: $T = 0,067 \text{ s}$	}	$T = (0,063 \pm 0,003) \text{ s}$
---	---	-----------------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,063} = 99,7 \text{ rad/s}$$

Com ja s'ha mencionat en la pàgina anterior, s'ha seleccionat per cada helicòpter de paper un dels seus vídeos per tal de poder fer una anàlisi comparativa de les seves gràfiques. Vegeu-ho tot seguit:

a) Les corresponents gràfiques y-t del moviment autogiratori de cadascun dels helicòpters de paper (que indiquen el nombre de voltes d'una de les ales):

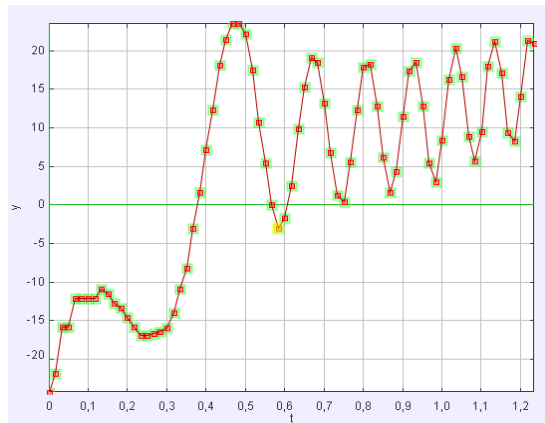


Figura 99 Gràfica y-t (video 2 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 150° d'obertura

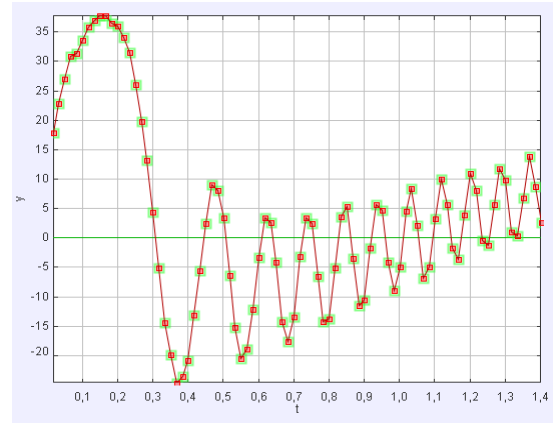


Figura 100 Gràfica y-t (video 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 120° d'obertura

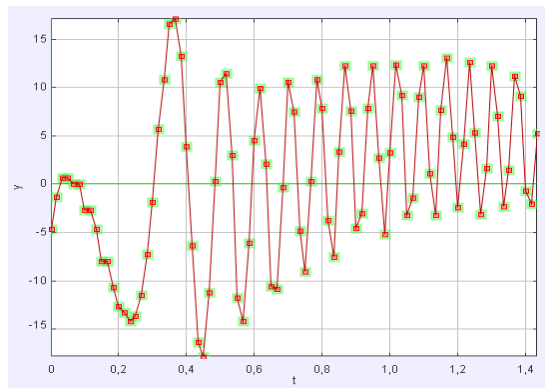


Figura 101 Gràfica y-t (video 3 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 90° d'obertura

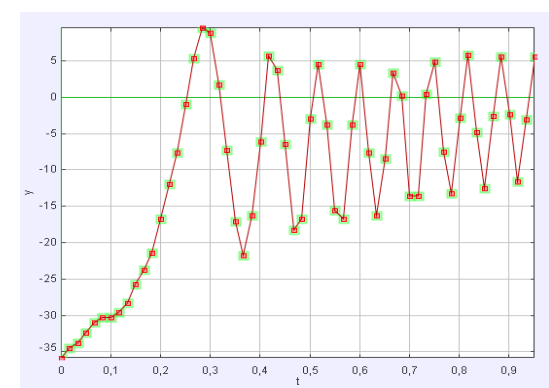


Figura 102 Gràfica y-t (video 2 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 60° d'obertura

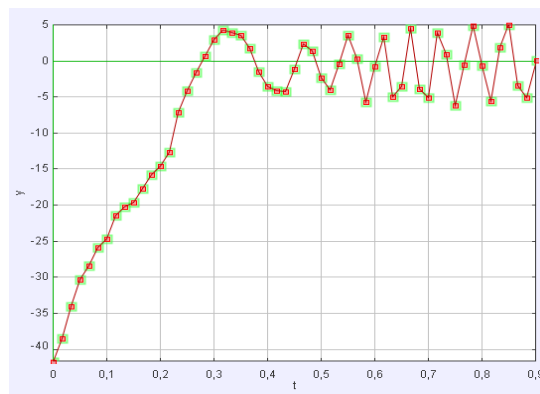


Figura 103 Gràfica y-t (video 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 30° d'obertura

En aquestes gràfiques s'observen dos trams: el primer consta de dues voltes de major període que les posteriors (dins de l'interval dels primers 0,5 i 0,8s); i, el segon, en canvi, mostra un major nombre de voltes però de període més petit i constant. Així doncs, tots els helicòpters comencen a girar amb un període constant aproximadament en un mateix interval de temps.

b) Les corresponents gràfiques T-t (període-temps de descens) de cada helicòpter de paper:

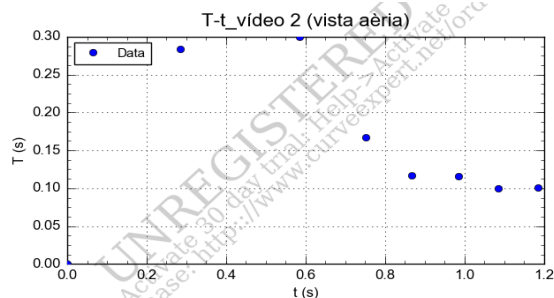


Figura 105 T-t_ (vídeo 2 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 150° d'obertura

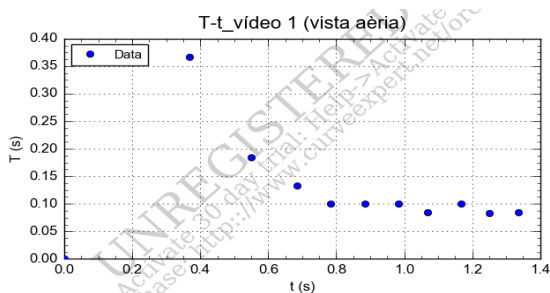


Figura 106 T-t_ (vídeo 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 120° d'obertura

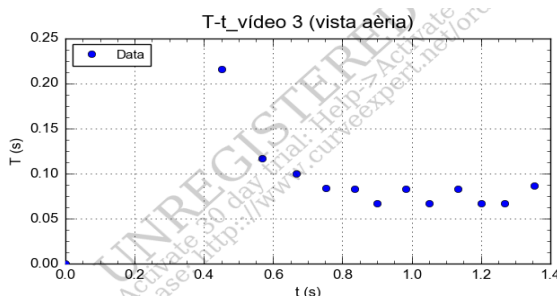


Figura 107 T-t_ (vídeo 3 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 90° d'obertura

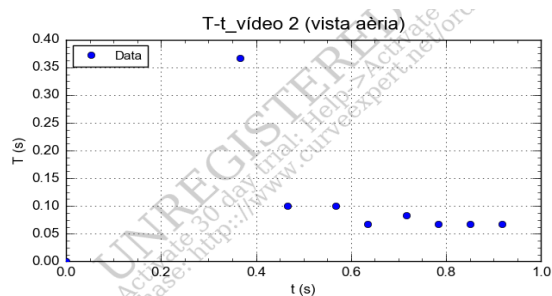


Figura 108 T-t_ (vídeo 2 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 60° d'obertura

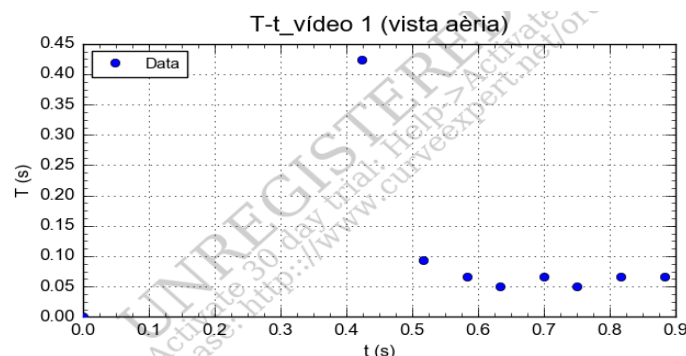


Figura 104 T-t_ (vídeo 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 30° d'obertura

Aquestes gràfiques corroboren que els helicòpters de paper assolixen un període constant dins l'interval de temps de 0,5-0,8s.

A més a més, també es destaca que a mesura que disminueix l'angle d'obertura dels helicòpters també disminueix el seu període de rotació.

Aquestes gràfiques també mostren, a partir de la relació $w = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$, que per a un menor període, més gran és la velocitat angular i, per tant, més ràpid gira l'enginy. Així doncs, els helicòpters de paper que més ràpid giren són els de menor angle d'obertura.

Tal i com es pot veure en els anteriors resultats i en la següent gràfica (Figura 109), la velocitat angular (en rad/s) de rotació de l'helicòpter de paper augmenta amb la disminució de l'angle d'obertura (en graus) segons l'equació polinòmica de segon grau següent:

$$w = 116,4 - 0,577\alpha + 0,139\alpha^2$$

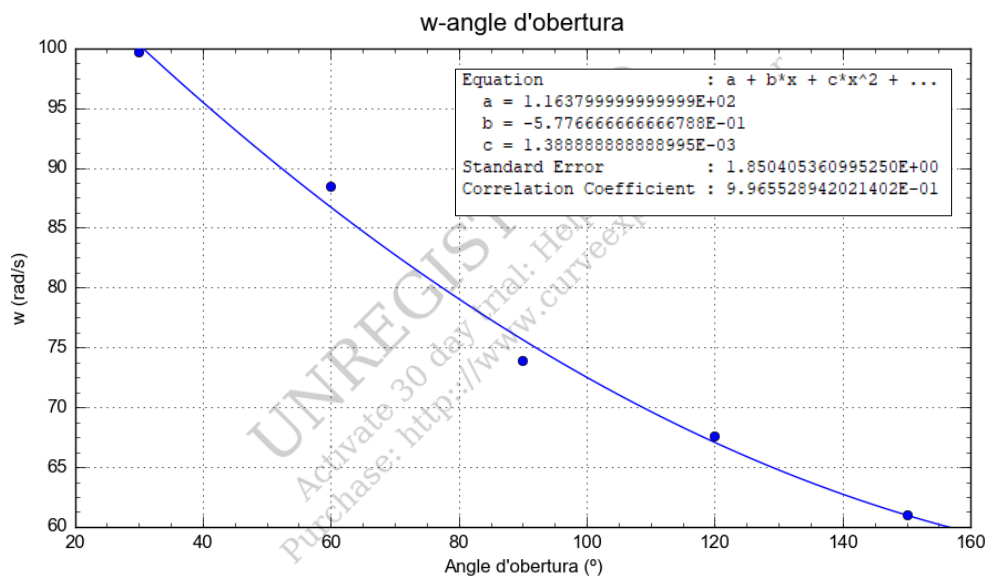


Figura 109 Relació entre l'angle d'obertura i la velocitat angular

4.5.2.3 Velocitat terminal

A partir dels vídeos realitzats als diversos helicòpters de paper de diferents angles d'obertura, s'han pogut determinar les següents velocitats terminals per cada cas (requadres taronges). També s'ha incorporat més endavant en aquest mateix apartat, una representació gràfica del descens de cada helicòpter de paper, per tal de poder fer un anàlisi comparatiu. La resta de dades obtingudes a partir dels programaris i els càlculs realitzats abans d'adquirir les dades que es mostren a continuació es troben a l'apartat 1.2 de l'ANNEX 2.

1) Helicòpter de paper de 180° d'obertura

A partir de les experimentacions realitzades amb aquest angle d'obertura (180°), s'ha determinat que l'helicòpter no segueix un moviment descendent estable i, que per tant, no es pot establir la seva velocitat terminal ja que en aquest no existeix un tram on es pugui suposar que el seu moviment és circular uniforme.

2) Helicòpter de paper de 150° d'obertura

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (150° d'obertura), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,22 \text{ m/s}$ Vídeo 2: $v = 1,21 \text{ m/s}$ Vídeo 3: $v = 1,24 \text{ m/s}$	}	$v = (1,22 \pm 0,01) \text{ m/s}$
--	---	-----------------------------------

3) Helicòpter de paper de 120° d'obertura

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (120° d'obertura), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,24 \text{ m/s}$ Vídeo 2: $v = 1,24 \text{ m/s}$	}	$v = (1,24 \pm 0,00) \text{ m/s}$
--	---	-----------------------------------

4) Helicòpter de paper de 90° d'obertura

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (90° d'obertura), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,26 \text{ m/s}$ Vídeo 2: $v = 1,26 \text{ m/s}$	}	$v = (1,26 \pm 0,00) \text{ m/s}$
--	---	-----------------------------------

5) Helicòpter de paper de 60° d'obertura

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (60° d'obertura), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,28 \text{ m/s}$ Vídeo 2: $v = 1,20 \text{ m/s}$ Vídeo 3: $v = 1,40 \text{ m/s}$	}	$v = (1,29 \pm 0,07) \text{ m/s}$
--	---	-----------------------------------

6) Helicòpter de paper de 30° d'obertura

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper (30° d'obertura), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,31 \text{ m/s}$ Vídeo 2: $v = 1,41 \text{ m/s}$ Vídeo 3: $v = 1,37 \text{ m/s}$	}	$v = (1,36 \pm 0,04) \text{ m/s}$
--	---	-----------------------------------

Com ja s'ha mencionat en la pàgina anterior, s'ha seleccionat per cada helicòpter de paper un dels seus vídeos per tal de poder fer una anàlisi comparativa de les seves gràfiques. Vegeu-ho tot seguit:

a) Les corresponents gràfiques x-t del moviment descendent de de cada helicòpter de paper:

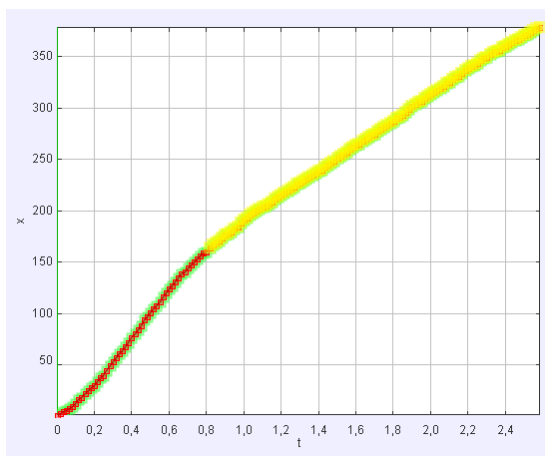


Figura 110 Gràfica x-t (vídeo 1 vista lateral) de l'helicòpter de 150° d'obertura

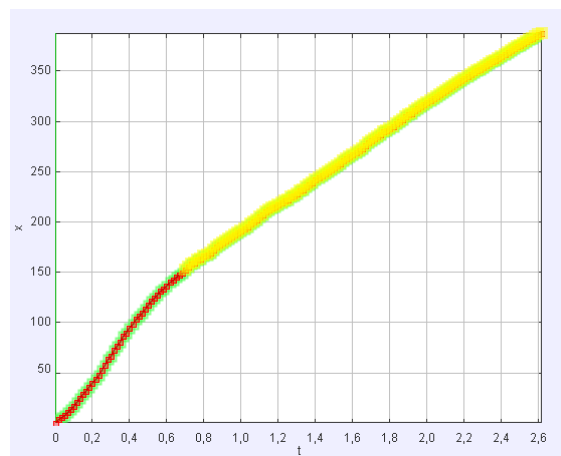


Figura 111 Gràfica x-t (vídeo 1 vista lateral) de l'helicòpter de 120° d'obertura

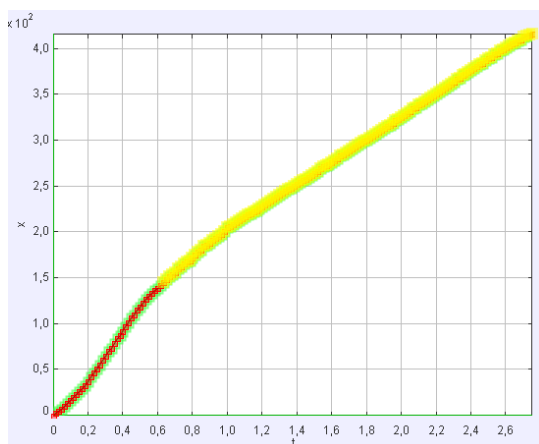


Figura 114 Gràfica x-t (vídeo 1 vista lateral) de l'helicòpter de paper de 90° d'obertura

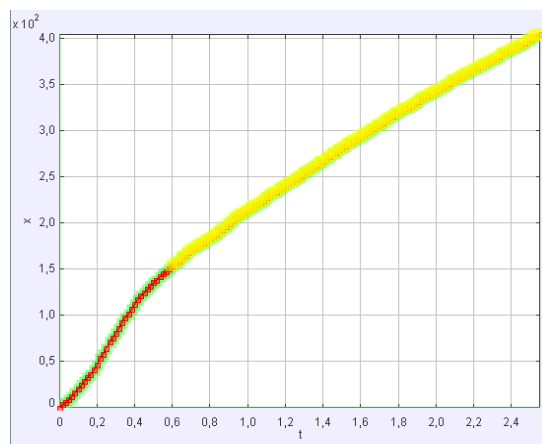


Figura 113 Gràfica x-t (vídeo 1 vista lateral) de l'helicòpter de paper de 60° d'obertura

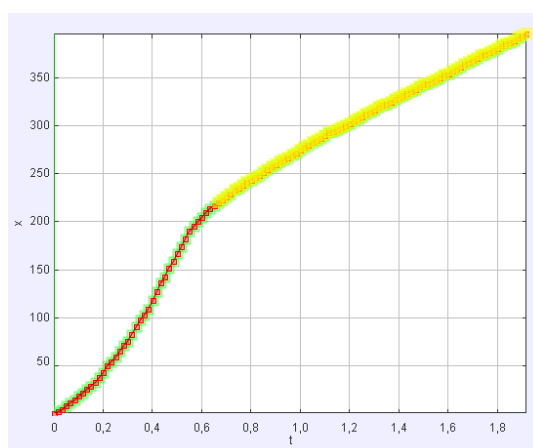


Figura 112 Gràfica x-t (vídeo 3 vista lateral) de l'helicòpter de paper de 30° d'obertura

En aquestes gràfiques s'observa un canvi de velocitat, que com ja s'ha anat dient al llarg del treball es divideix en dos trams: el primer s'assimila a una caiguda lliure i, el segon, al període en el qual l'helicòpter assoleix la seva velocitat terminal. On més es destaca aquest canvi de velocitat és en l'helicòpter de 30° d'obertura.

Comparativament s'observa que els helicòpters assoleixen la velocitat terminal en un mateix interval de temps (aproximadament entre 0,6 i 0,8s). Tot i això, en aquest mateix temps els no tots recorren la mateixa distància. Mentre que els helicòpters de 150°, 120°, 90° i 60° només descendeixen al voltant de 150cm, el de 30° d'obertura aconsegueix fer-ne 200, en un mateix interval de temps.

D'altra banda, si s'examina el temps total que els diferents helicòpters de paper tarden en recórrer una mateixa distància (entre 350 i 400 cm), s'aprecia que a mesura que disminueix l'angle d'obertura la massa, l'interval de temps és menor. Per tant, es pot determinar que com menys angle d'obertura té un helicòpter menys tarda en recórrer una determinada distància.

Pel que fa a la pendent del segon tram de les gràfiques, es veu que a mesura que disminueix l'obertura de les ales dels helicòpters aquesta s'agreuja, és a dir, té major inclinació. La pendent de la recta es correspon amb la velocitat terminal (tal i com es pot veure en l'apartat b) següent), així doncs també es pot afirmar que per un angle d'obertura menor (i totes les altres característiques iguals), la velocitat terminal que assoleix un helicòpter de paper és major.

b) Les respectives gràfiques x-t i equacions de la gràfica corresponents al tram on l'helicòpter de paper cau amb una velocitat constant

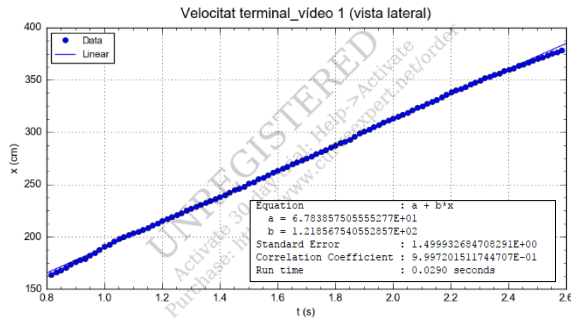


Figura 115 Gràfica x-t (video 1 vista lateral) i equació de la gràfica coeficient de correlació. Twister 150°

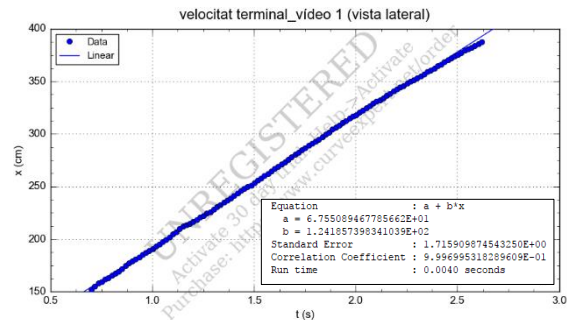


Figura 116 Gràfica x-t (video 1 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister 120°

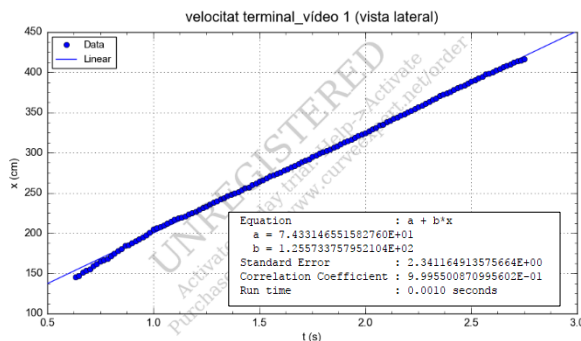


Figura 117 Gràfica x-t (video 1 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister 90°

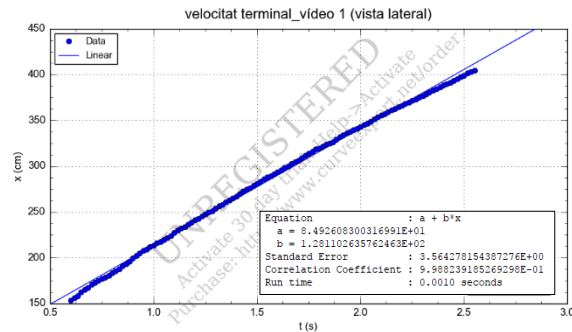


Figura 118 Gràfica x-t (video 1 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister 60°

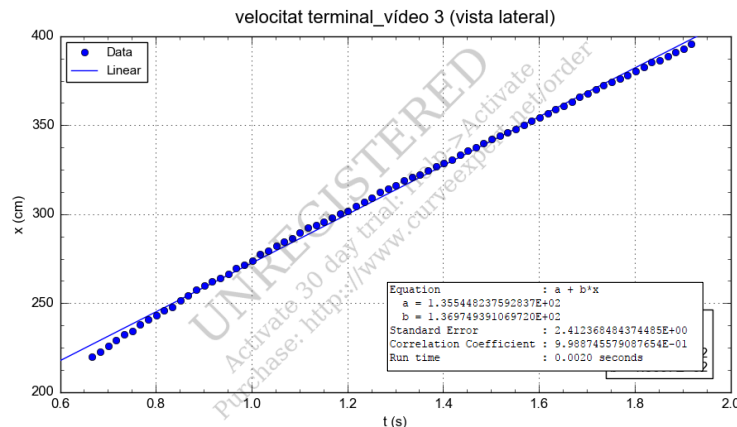


Figura 119 Gràfica x-t (video 3 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister 30°

Tal i com es pot veure en els anteriors resultats i la següent gràfica (Figura 120), la velocitat terminal de descens (en m/s) augmenta amb la disminució de l'angle d'obertura (en graus) segons la regressió polinòmica de 2n grau següent:

$$v = 1,42 - 2,67 \cdot 10^{-3} \alpha + 8,73 \cdot 10^{-6} \alpha^2$$

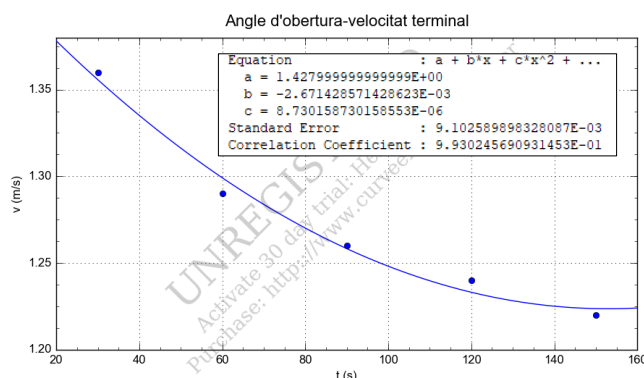


Figura 120 Resultats ajustats a una regressió polinàmica de 4t grau

4.5.2.4 Relació entre la velocitat terminal i l'angular

A continuació es mostren totes les dades obtingudes en referència als helicòpters de paper de diferent angle d'obertura:

Helicòpter de paper	Massa (m)	Longitud ala (L)	Amplada ala (W)	Angle d'obertura (α)	Angle respecte la vertical (θ)
5	0,79 g	0,070 m	0,015 m	180°	90°
6	0,79 g	0,070 m	0,015 m	150°	75°
7	0,79 g	0,070 m	0,015 m	120°	60°
8	0,79 g	0,070 m	0,015 m	90°	45°
9	0,79 g	0,070 m	0,015 m	60°	30°
10	0,79 g	0,070 m	0,015 m	30°	15°

Taula 5 Característiques dels helicòpters de paper de diferent angle d'obertura

Helicòpter de paper	Angle respecte la vertical (θ)	$R = \sqrt{L^2 + W^2}$	$\frac{R}{2}$	$R_{efectiu} = \frac{R}{2} \cdot \sin \theta$
5	90°	0,072 m	0,036 m	0,036 m
6	75°	0,072 m	0,036 m	0,035 m
7	60°	0,072 m	0,036 m	0,031 m
8	45°	0,072 m	0,036 m	0,025 m
9	30°	0,072 m	0,036 m	0,018 m
10	15°	0,072 m	0,036 m	0,0090 m

Taula 6 Característiques dels helicòpters de paper de diferent angle d'obertura

Helicòpter de paper	Període (T)	Velocitat angular (ω)	Velocitat terminal ($v_{terminal}$)
5	-	-	-
6	0,103 s	31,0 rad/s	1,22 m/s
7	0,093 s	67,6 rad/s	1,24 m/s
8	0,085 s	73,9 rad/s	1,26 m/s
9	0,071 s	88,5 rad/s	1,29 m/s
10	0,063 s	99,7 rad/s	1,36 m/s

Taula 7 Resultats obtinguts dels helicòpters de paper de diferent angle d'obertura

A partir dels resultats obtinguts s'observa que tant la velocitat angular com la velocitat terminal de l'helicòpter de paper augmenten amb una disminució de l'angle d'obertura. A més a més, comparativament s'observa que els cinc helicòpters (6 al 10) de paper assoleixen la velocitat terminal i angular constants en un mateix interval de temps (aproximadament entre 0,6 i 0,8s).

4.5.3 Variació de la longitud de les ales

4.5.3.1 Helicòpters de paper utilitzats

Per tal d'estudiar la influència de la longitud de les ales en la caiguda d'un helicòpter de paper i $T(s)$, s'han preparat 7 helicòpters de paper amb longitud d'ales diferents, però amb les altres variables iguals (a excepció del radi de gir, ja que l'angle d'obertura hi influeix, tal com ja s'ha mostrat en l'equació $R_{efectiu} = \frac{R}{2} \cdot \sin \theta$; i la superfície, ja que $S = L \cdot A$), és a dir:

$$T = f(L)_{A,m,\alpha}$$

Els valors d'aquestes constants són:

- $W = 1,5 \text{ cm}$
- $m = 0,75 \text{ g}$
- $\alpha = 90^\circ$

Els helicòpters de paper tenen les següents longituds i superfícies d'ala i els següents radis:

1. $L_{11} = 1,0 \text{ cm}$	$S_{11} = 1,5 \text{ cm}^2$	$R_{11 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{1,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 0,6 \text{ cm}$
2. $L_{12} = 2,0 \text{ cm}$	$S_{12} = 3,0 \text{ cm}^2$	$R_{12 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{2,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 0,9 \text{ cm}$
3. $L_{13} = 3,0 \text{ cm}$	$S_{13} = 4,5 \text{ cm}^2$	$R_{13 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{3,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 1,2 \text{ cm}$
4. $L_{14} = 4,0 \text{ cm}$	$S_{14} = 6,0 \text{ cm}^2$	$R_{14 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{4,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 1,5 \text{ cm}$
5. $L_{15} = 5,0 \text{ cm}$	$S_{15} = 7,5 \text{ cm}^2$	$R_{15 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{5,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 1,8 \text{ cm}$
6. $L_{16} = 6,0 \text{ cm}$	$S_{16} = 9,0 \text{ cm}^2$	$R_{16 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{6,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 2,2 \text{ cm}$
7. $L_{17} = 7,0 \text{ cm}$	$S_{17} = 10,5 \text{ cm}^2$	$R_{17 \text{ efectiu}} = \frac{\sqrt{7,0^2 + 1,5^2}}{2} \cdot \sin 45 = 2,5 \text{ cm}$

Tal i com es pot veure en la següent figura la diferència de la longitud de l'ala s'ha assolit a la reducció de la longitud de l'ala del model Standard cm a cm fins arribar a 1,0 cm. La massa s'ha mantingut constant afegint cinta adhesiva a la base dels helicòpters de paper.

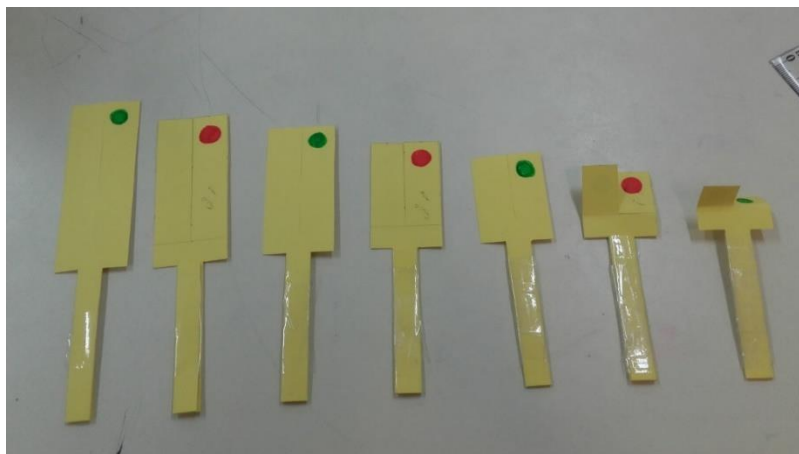


Figura 121 Helicòpters de paper amb diferent longitud d'ales, d'esquerra a dreta: 7,0 cm, 6,0 cm, 5,0 cm, 4,0 cm, 3,0 cm, 2,0 cm i 1,0 cm

4.5.3.2 Velocitat angular

A partir dels vídeos realitzats als diversos helicòpters de paper de diferents longitud d'ala, s'han pogut determinar les següents velocitats angulars i períodes, en el tram que es pot suposar que el seu moviment és circular uniforme, per cada cas (requadres grocs). També s'ha incorporat més endavant en aquest mateix apartat, una representació gràfica del moviment autogiratori de cada helicòpter de paper, per tal de poder fer un anàlisi comparatiu. La resta de dades obtingudes a partir dels programaris i els càlculs realitzats abans d'adquirir les dades que es mostren a continuació es troben a l'apartat 3.1 de l'ANNEX 2.

1) Helicòpter de paper d'1,0 cm de longitud d'ala

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper ($L = 1,0 \text{ cm}$), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,033s$ Vídeo 2: $T = 0,037s$ Vídeo 3: $T = 0,033s$	}	$T = (0,034 \pm 0,002) s$
--	---	---------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,034} = 184,8 \text{ rad/s}$$

2) Helicòpter de paper de 2,0 cm de longitud d'ala

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper ($L = 2,0 \text{ cm}$), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,047s$ Vídeo 2: $T = 0,031 s$ Vídeo 3: $T = 0,045 s$	}	$T = (0,041 \pm 0,007) s$
--	---	---------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,041} = 153,2 \text{ rad/s}$$

3) Helicòpter de paper de 3,0 cm de longitud d'ala

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper ($L = 3,0 \text{ cm}$), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,046 s$ Vídeo 2: $T = 0,050 s$ Vídeo 3: $T = 0,041 s$	}	$T = (0,046 \pm 0,003) s$
---	---	---------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,046} = 136,6 \text{ rad/s}$$

4) Helicòpter de paper de 4,0 cm de longitud d'ala

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper ($L = 4,0 \text{ cm}$), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,042 \text{ s}$ Vídeo 2: $T = 0,043 \text{ s}$ Vídeo 3: $T = 0,038 \text{ s}$	}	$T = (0,041 \pm 0,002) \text{ s}$
---	---	-----------------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,041} = 153,2 \text{ rad/s}$$

5) Helicòpter de paper de 5,0 cm de longitud d'ala

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper ($L = 5,0 \text{ cm}$), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,053 \text{ s}$ Vídeo 2: $T = 0,050 \text{ s}$ Vídeo 3: $T = 0,057 \text{ s}$	}	$T = (0,053 \pm 0,002) \text{ s}$
---	---	-----------------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,053} = 118,6 \text{ rad/s}$$

6) Helicòpter de paper de 6,0 cm de longitud d'ala

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper ($L = 6,0 \text{ cm}$), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,057 \text{ s}$ Vídeo 2: $T = 0,051 \text{ s}$ Vídeo 3: $T = 0,053 \text{ s}$	}	$T = (0,054 \pm 0,002) \text{ s}$
---	---	-----------------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,054} = 116,4 \text{ rad/s}$$

7) Helicòpter de paper de 7,0 cm de longitud d'ala

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper ($L = 7,0 \text{ cm}$), s'ha determinat que el període (mitjà) en aquest cas és:

Vídeo 1: $T = 0,074 \text{ s}$ Vídeo 2: $T = 0,073 \text{ s}$ Vídeo 3: $T = 0,075 \text{ s}$	}	$T = (0,074 \pm 0,001) \text{ s}$
---	---	-----------------------------------

D'aquesta forma la velocitat angular a la que gira l'enginy en el tram considerat que té un període constant és:

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,074} = 84,9 \text{ rad/s}$$

Com ja s'ha mencionat en la pàgina anterior, s'ha seleccionat per cada helicòpter de paper un dels seus vídeos per tal de poder fer una anàlisi comparativa de les seves gràfiques. Vegeu-ho tot seguit:

a) Les corresponents gràfiques y-t del moviment autogiratori de cadascun dels helicòpters de paper (que indiquen el nombre de voltes d'una de les ales):

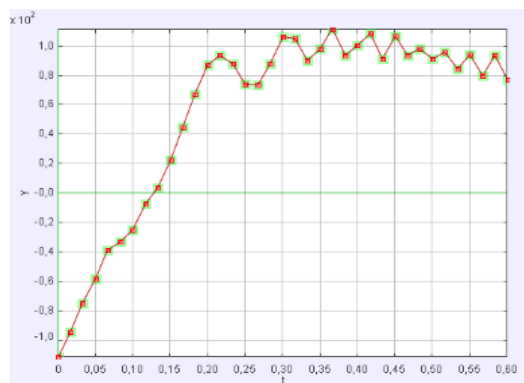


Figura 122 Gràfica y-t (video 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 1,0cm de longitud d'ala

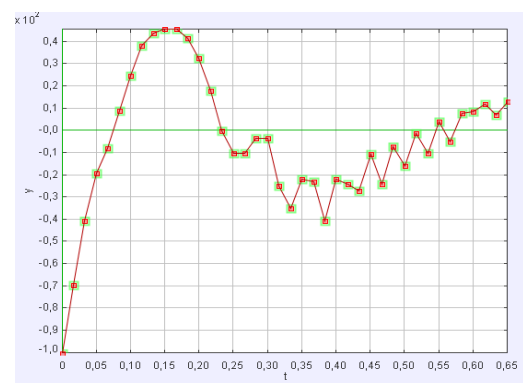


Figura 123 Gràfica y-t (video 3 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 2,0cm de longitud d'ala

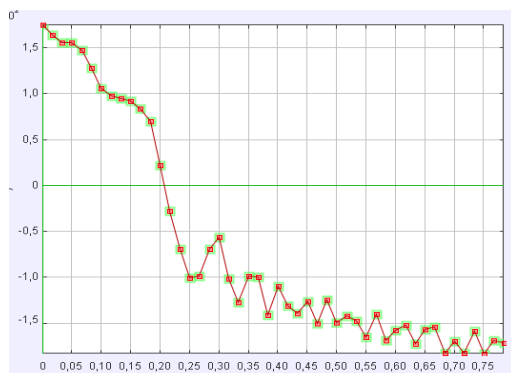


Figura 124 Gràfica y-t (video 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 3,0cm de longitud d'ala

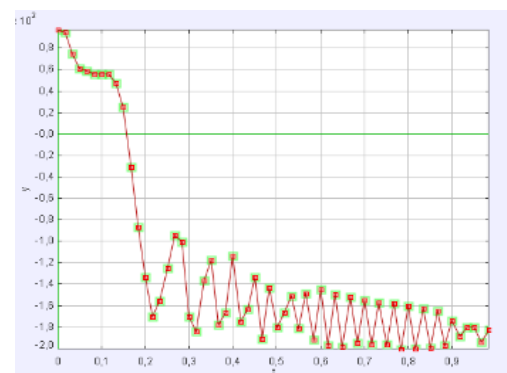


Figura 125 Gràfica y-t (video 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 4,0cm de longitud d'ala

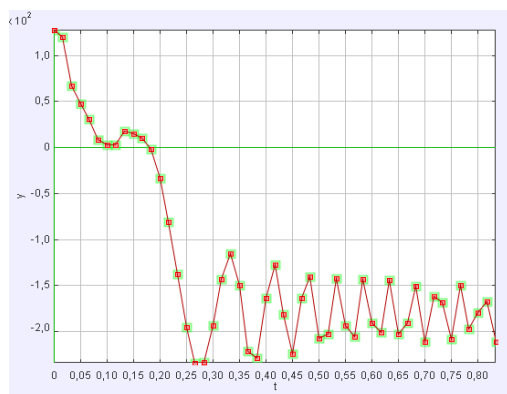


Figura 126 Gràfica y-t (video 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 5,0cm de longitud d'ala

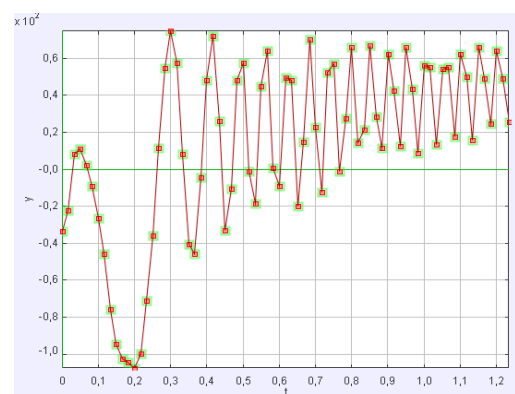


Figura 127 Gràfica y-t (video 3 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 6,0cm de longitud d'ala

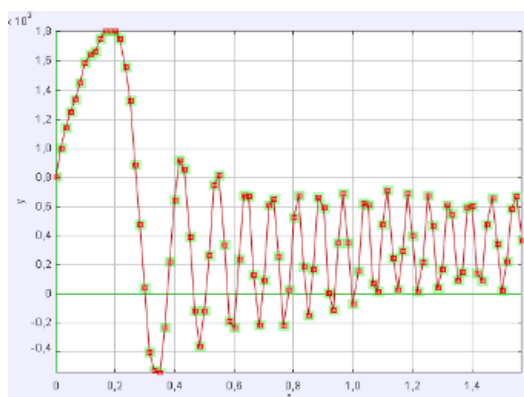


Figura 128 Gràfica y-t (video 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de 7,0cm de longitud d'ala

En aquestes gràfiques s'observen dos trams: el primer consta de dues voltes de major període que les posteriors (dins de l'interval dels primers 0,3 i 0,5s els helicòpters de 1 a 4cm de longitud d'ala i, entre els primers 0,5 i 0,8 la resta); i, el segon, en canvi, mostra un major nombre de voltes però de període més petit i constant. Així doncs, tots els helicòpters comencen a girar amb un període constant aproximadament en un mateix interval de temps.

b) Les corresponents gràfiques T-t (període- temps de descens) de cada helicòpter de paper:

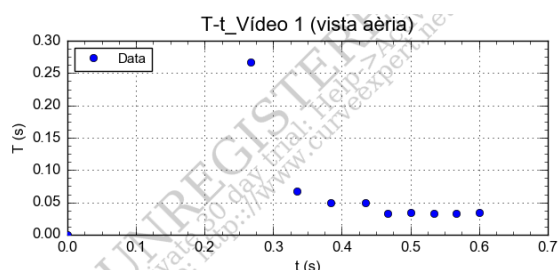


Figura 129 T-t_ (Video 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de L= 1,0 cm

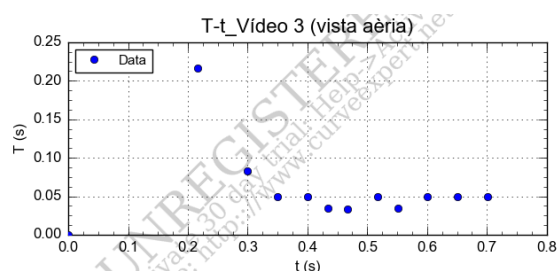


Figura 130 T-t_ (Video 3 vista aèria) de l'helicòpter de paper de L=2,0 cm

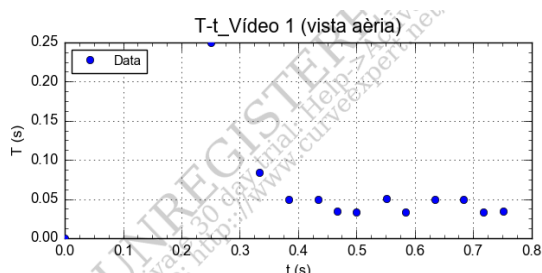


Figura 131 T-t_ (Video 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de L=3,0 cm

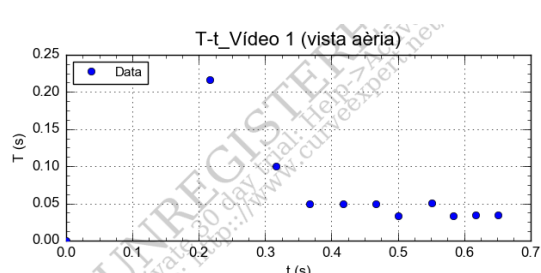


Figura 132 T-t_ (Video 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de L= 4,0 cm

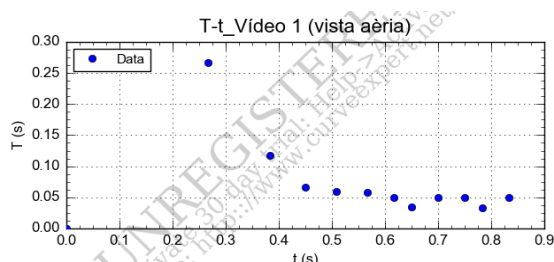


Figura 134 T-t_ (Video 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de L= 5,0 cm

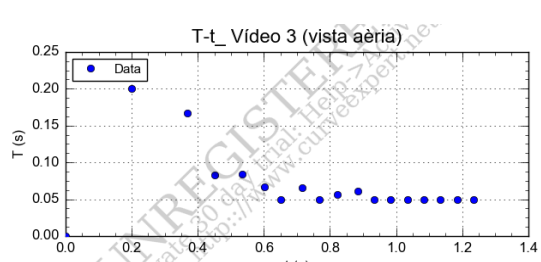


Figura 133 T-t_ (Video 3 vista aèria) de l'helicòpter de paper de L= 6,0 cm

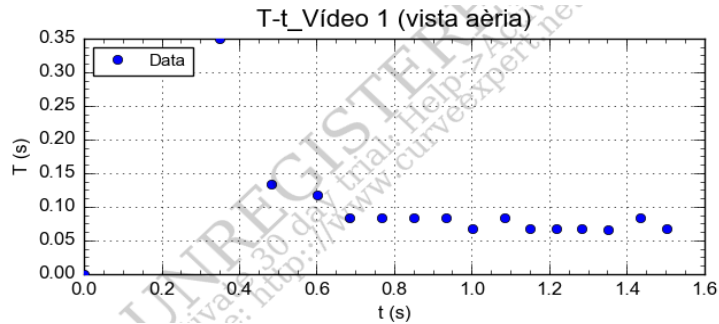


Figura 135 T-t_ (Vídeo 1 vista aèria) de l'helicòpter de paper de L=7,0 cm

Aquestes gràfiques corroboren que els helicòpters de paper assolixen un període constant dins l'interval de temps dels primers 0,3 i 0,5s els helicòpters de 1 a 4cm de longitud d'ala i, entre els primers 0,5 i 0,8 la resta.

A més a més, també es destaca que a mesura que disminueix la longitud de l'ala dels helicòpters també disminueix el seu període de rotació.

Cal destacar però que es troba un valor anòmal en el període de l'helicòpter de 4,0 cm de longitud d'ala al qual no li trobem justificació.

Aquestes gràfiques també mostren, a partir de la relació $w = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$, que per a un menor període, més gran és la velocitat angular i, per tant, més ràpid gira l'enginy. Així doncs, els helicòpters de paper que més ràpid giren són els de menor longitud d'ala.

Tal i com es pot veure en els anteriors resultats i en la següent gràfica, la velocitat angular (en rad/s) de rotació de l'helicòpter de paper augmenta amb la disminució de la longitud d'ala (en cm) segons l'equació polinòmica de tercer grau següent:

$$w = 2,42 - 71,9L + 15,8L^2 - 1,25L^3$$

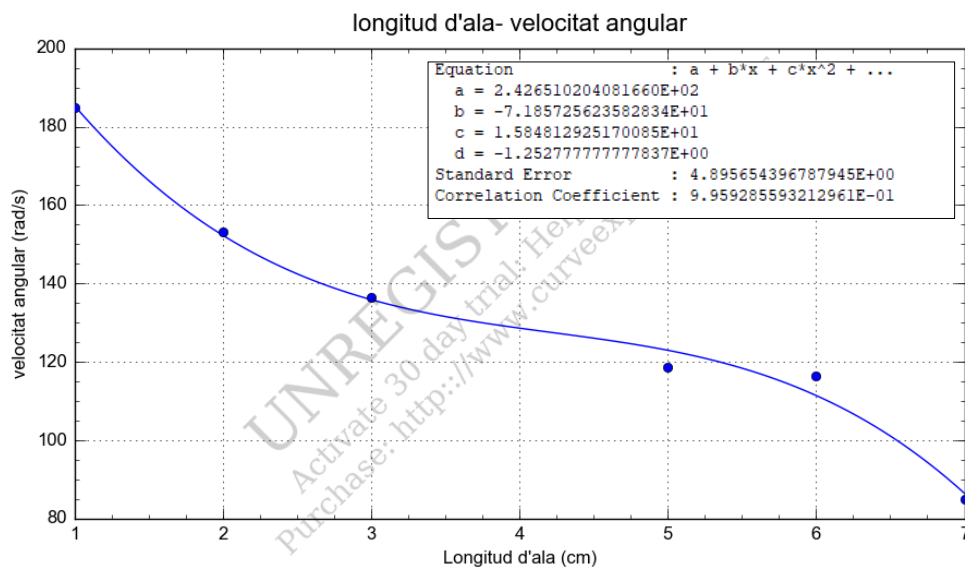


Figura 136 Resultats ajustats a una regressió polinòmica de tercer grau

4.5.3.3 Velocitat terminal

A partir dels vídeos realitzats als diversos helicòpters de paper de diferents longituds d'ales, s'han pogut determinar les següents velocitats terminals per cada cas (requadres grocs). També s'ha incorporat més endavant en aquest mateix apartat, una representació gràfica del descens de cada helicòpter de paper, per tal de poder fer un anàlisi comparatiu. La resta de dades obtingudes a partir dels programaris i els càlculs realitzats abans d'adquirir les dades que es mostren a continuació es troben a l'apartat 3.2 de l'ANNEX 2.

1) Helicòpter de paper d'1,0, 2,0 i 3,0 cm de longitud d'ala

A partir de les experimentacions realitzades amb aquestes longituds, s'ha determinat que aquests helicòpters de paper no assolixen una velocitat terminal a causa de la poca força de resistència que genera l'aire sobre les ales i, per tant, el moviment de caiguda és compatible a un MRUA i no pas un MRU.

2) Helicòpter de paper de 4,0 cm de longitud d'ala

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper ($L = 4,0 \text{ cm}$), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 2,10 \text{ m/s}$ Vídeo 2: $v = 2,09 \text{ m/s}$ Vídeo 3: $v = 2,22 \text{ m/s}$	}	$v = (2,14 \pm 0,06) \text{ m/s}$
--	---	-----------------------------------

3) Helicòpter de paper de 5,0 cm de longitud d'ala

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper ($L = 5,0 \text{ cm}$), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,67 \text{ m/s}$ Vídeo 2: $v = 1,93 \text{ m/s}$ Vídeo 3: $v = 1,70 \text{ m/s}$	}	$v = (1,77 \pm 0,11) \text{ m/s}$
--	---	-----------------------------------

4) Helicòpter de paper de 6,0 cm de longitud d'ala

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper ($L = 6,0 \text{ cm}$), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,65 \text{ m/s}$ Vídeo 2: $v = 1,70 \text{ m/s}$ Vídeo 3: $v = 1,64 \text{ m/s}$	}	$v = (1,67 \pm 0,03) \text{ m/s}$
--	---	-----------------------------------

5) Helicòpter de paper de 7,0 cm de longitud d'ala

Mitjançant l'anàlisi dels vídeos de l'helicòpter de paper ($L = 7,0 \text{ cm}$), s'ha determinat que la velocitat terminal en aquest cas és:

Vídeo 1: $v = 1,32 \text{ m/s}$ Vídeo 2: $v = 1,22 \text{ m/s}$ Vídeo 3: $v = 1,28 \text{ m/s}$	}	$v = (1,27 \pm 0,04) \text{ m/s}$
--	---	-----------------------------------

Com ja s'ha mencionat en la pàgina anterior, s'ha seleccionat per cada helicòpter de paper un dels seus vídeos per tal de poder fer una anàlisi comparativa de les seves gràfiques. Vegeu tot seguit:

a) Les corresponents gràfiques x-t del moviment descendent de de cada helicòpter de paper:

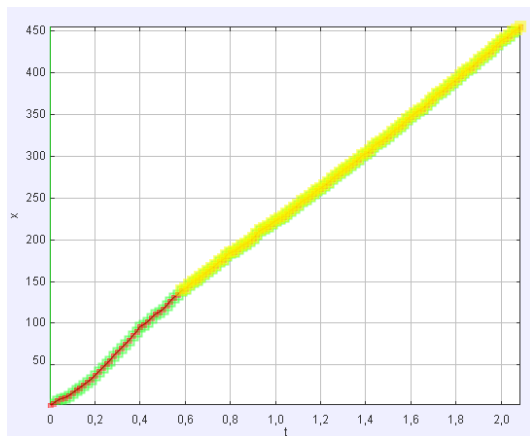


Figura 139 Gràfica x-t (vídeo 1 vista lateral) de l'helicòpter de 4,0cm d'ala



Figura 140 Gràfica x-t (vídeo 3 vista lateral) de l'helicòpter de 5,0cm d'ala

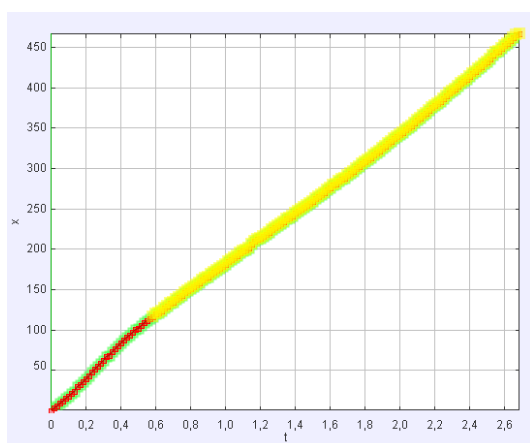


Figura 138 Gràfica x-t (vídeo 1 vista lateral) de l'helicòpter de 6,0cm d'ala

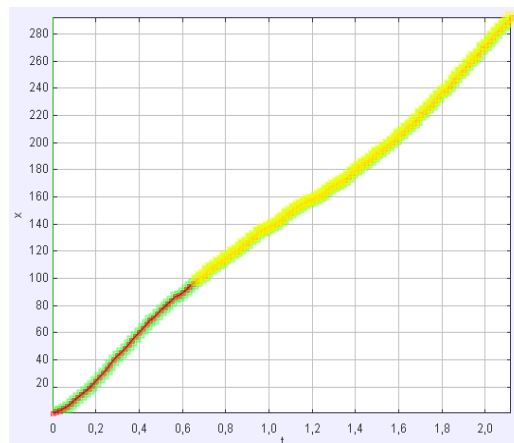


Figura 137 Gràfica x-t (vídeo 3 vista lateral) de l'helicòpter de 7,0cm d'ala

En aquestes gràfiques s'observa un canvi de velocitat, que com ja s'ha anat dient al llarg del treball es divideix en dos trams: el primer s'assimila a una caiguda lliure i, el segon, al període en el qual l'helicòpter assolix la seva velocitat terminal.

Comparativament s'observa que els quatre helicòpters assolixen la velocitat terminal en un mateix interval de temps (aproximadament entre 0,6 i 0,8s). Tot i això, en aquest mateix temps no tots recorren la mateixa distància. Mentre que els helicòpters de 4,0 i 5,0 cm de longitud d'ala descendeixen al voltant de 150cm, els de 6,0 i 7,0 cm d'ala tant sols aconseguen fer-ne 100, en un mateix interval de temps.

D'altra banda, si s'examina el temps total que els diferents helicòpters de paper tarden en recórrer una mateixa distància (entre 350 i 400 cm), s'aprecia que a mesura que augmenta la longitud d'ala, l'interval de temps és major. Per tant, es pot determinar que com més llargues siguin les ales de l'helicòpter més tarda en recórrer una determinada distància.

Com ja s'ha dit la pendent del segon tram de les gràfiques, es correspon amb la velocitat terminal (tal i com es pot veure en l'apartat b) següent), així doncs també es pot afirmar que per una menor longitud d'ala (i totes les altres característiques iguals), la velocitat terminal que assoleix un helicòpter de paper és major.

b) Les respectives gràfiques x-t i equacions de la gràfica corresponents al tram on l'helicòpter de paper cau amb una velocitat constant

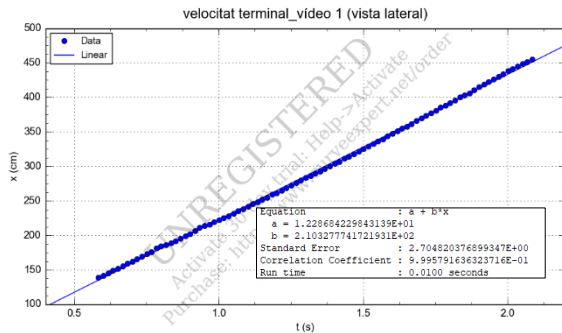


Figura 143 Gràfica x-t (video 1 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister L=4,0 cm

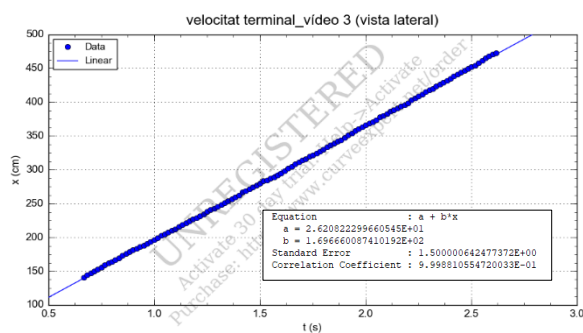


Figura 144 Gràfica x-t (video 2 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister L=5,0 cm

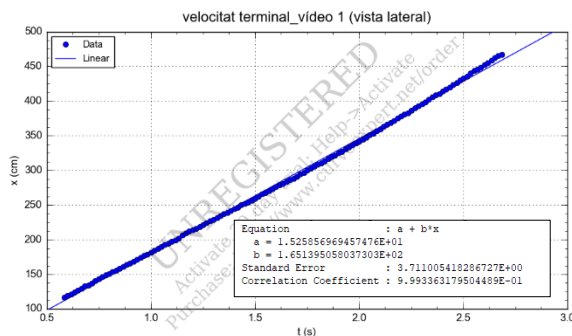


Figura 142 Gràfica x-t (video 1 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister L=6,0 cm

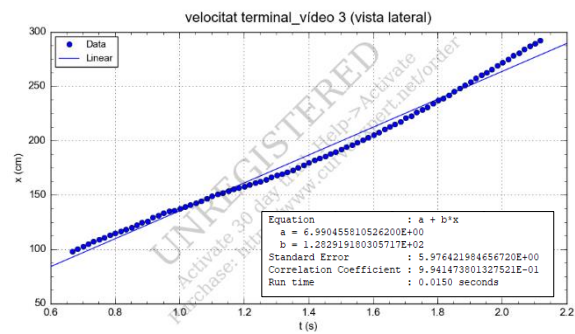


Figura 141 Gràfica x-t (video 3 vista lateral) i equació de la gràfica i coeficient de correlació. Twister L=7,0 cm

Tal i com es pot veure en els anteriors resultats i la següent gràfica, la velocitat terminal de descens (en m/s) augmenta amb la disminució de la longitud de l'ala (en centímetres) segons la regressió polinòmica de 3er grau següent:

$$v = 17,72 - 8,61L + 1,56L^2 - 9,50 \cdot 10^{-2}L^3$$

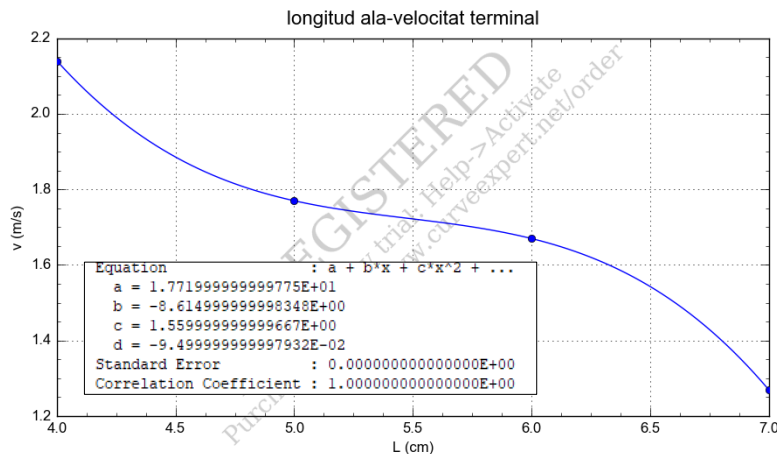


Figura 145 Resultats ajustats a una regressió polinòmica de tercer grau

4.5.3.4 Relació entre la velocitat terminal i l'angular

A continuació es mostren totes les dades obtingudes en referència als helicòpters de paper de diferent longitud d'ala:

Helicòpter de paper	Massa (m)	Longitud ala (L)	Amplada ala (W)	Angle d'obertura (α)	Angle respecte la vertical (θ)
11	0,75 g	0,010 m	0,015 m	90°	45°
12	0,75 g	0,020 m	0,015 m	90°	45°
13	0,75 g	0,030 m	0,015 m	90°	45°
14	0,75 g	0,040 m	0,015 m	90°	45°
15	0,75 g	0,050 m	0,015 m	90°	45°
16	0,75 g	0,060 m	0,015 m	90°	45°
17	0,75 g	0,070 m	0,015 m	90°	45°

Taula 8 Característiques dels helicòpters de paper de diferent longitud d'ala

Helicòpter de paper	Longitud ala (L)	$R = \sqrt{L^2 + W^2}$	$\frac{R}{2}$	$R_{efectiu} = \frac{R}{2} \cdot \sin \theta$
11	0,010 m	0,018 m	0,0090 m	0,0060 m
12	0,020 m	0,025 m	0,013 m	0,0090 m
13	0,030 m	0,034 m	0,017 m	0,012 m
14	0,040 m	0,043 m	0,021 m	0,015 m
15	0,050 m	0,052 m	0,026 m	0,018 m
16	0,060 m	0,062 m	0,031 m	0,022 m
17	0,070 m	0,072 m	0,036 m	0,025 m

Taula 9 Característiques dels helicòpters de paper de diferent longitud d'ala

Helicòpter de paper	Període (T)	Velocitat angular (ω)	Velocitat terminal ($v_{terminal}$)
11	0,034 s	184,8 rad/s	-
12	0,041 s	153,2 rad/s	-
13	0,046 s	136,6 rad/s	-
14	0,041 s	153,2 rad/s	2,14 m/s
15	0,053 s	118,6 rad/s	1,77 m/s
16	0,054 s	116,4 rad/s	1,67 m/s
17	0,074 s	84,9 rad/s	1,27 m/s

Taula 10 Resultats dels helicòpters de paper de diferent longitud d'ala

A partir dels resultats obtinguts s'observa que tant la velocitat angular com la velocitat terminal de l'helicòpter de paper augmenten amb una disminució de la longitud de l'ala.

A més a més, comparativament s'observa que els quatre helicòpters (14 al 17) de paper assolixen la velocitat terminal i angular constants en un mateix interval de temps (aproximadament entre 0,6 i 0,8s).

5. DETERMINACIÓ EXPERIMENTAL DE LA DENSITAT DE L'AIRE

5.1 DESCRIPCIÓ DE L'EXPERIMENT

Es determinarà la densitat de l'aire mesurant la massa de la quantitat d'aire que hi ha a l'interior d'una ampolla tapada d'un litre d'aire, a la pressió atmosfèrica (1 atm) i a la temperatura ambient (20°C).

Per compensar la força ascensional (E) que actua sobre l'ampolla degut al volum d'aire desallotjat (1L), s'introduirà amb una manxa aire fins a duplicar la pressió. Per fer això, s'utilitzarà una vàlvula antiretorn.

Com a manòmetre s'utilitzarà una xeringa amb l'obertura taponada amb silicona. Quan el volum de l'aire de la xeringa s'hagi reduït a la meitat, voldrà dir, segons la llei de Boyle, que la pressió s'ha duplicat:

$$\left. \begin{array}{l} V_0 = 5,0\text{mL} \rightarrow P_0 = 1\text{atm} \\ V = 2,5\text{mL} \rightarrow P = 2\text{atm} \\ T_0 = T \text{ (constant)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{P_0 \cdot V_0}{T_0} = \frac{P \cdot V}{T} \rightarrow P_0 \cdot V_0 = P \cdot V \rightarrow P = \frac{P_0 \cdot V_0}{V} \\ P = \frac{P_0 \cdot V_0}{\frac{V_0}{2}} = 2P_0 \end{array}$$

I, al mateix temps, la massa d'aire continguda també ho haurà fet (també s'haurà duplicat), segons l'equació de Clapeyron:

$$PV = nRT \rightarrow 2PV = 2nRT \rightarrow 2PV = 2 \frac{mRT}{M} \rightarrow 2PV = 2m \frac{RT}{M}$$

Efectivament si la temperatura es manté constant, si es duplica la pressió, es duplica el nombre de mols de gas i per tant també es duplica la massa d'aire.

Cal tenir en compte que la bàscula de precisió el que mesura realment és la força normal (\vec{N}). Si es mira la figura 111, aquesta força \vec{N} és igual a: $N = P - E$.

D'altra banda, segons el principi d'Arquímedes, la força ascensional (E) és igual al pes de l'aire desallotjat:

$$E = V_{\text{aire desallotjat}} \cdot d_{\text{aire}} \cdot g = m_{\text{aire}} \cdot g$$

El valor de N serà doncs:

$$N = P - E = (m_{\text{recipient}} + m_{\text{aire}})g - (m_{\text{aire}})g = m_{\text{recipient}}$$



$$E = V_{\text{aire desallotjat}} \cdot d_{\text{aire}} \cdot g = m_{\text{aire}} \cdot g$$

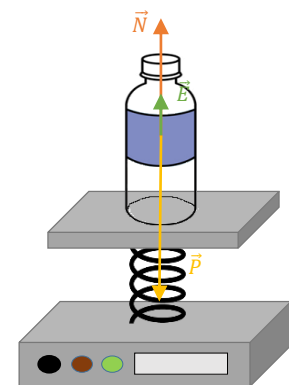


Figura 146 esquema de forces

Per conèixer realment la massa d'aire continguda dins de l'ampolla caldrà mesurar la massa de l'ampolla amb aire a 2atm de pressió i, a 1atm de pressió. La diferència entre les masses serà equivalent a la massa d'1L d'aire, i es podrà determinar la seva densitat a partir de la seva expressió.

5.2 UTILLATGE

L'utillatge necessari per determinar experimentalment la densitat de l'aire, és el següent:

- Ampolla d'1L
- Tap de botella connectat a una vàlvula antiretorn
- Manxa (bomba) d'aire
- Xeringa taponada amb silicona calenta
- Bàscula de precisió



Figura 147 D'esquerra a dreta: manxa d'aire, botella d'1L, xeringa tapada amb silicona i balança Kern 440-33 (màx. 200g i $d=0,01g$)



Figura 148 Vàlvula antiretorn connectada amb el tap i un tub (que permetrà unir-lo amb la manxa)

5.3 DIBUIX DEL MUNTATGE

A continuació es mostra en un esquema el muntatge de l'utillatge per tal de trobar la densitat de l'aire:

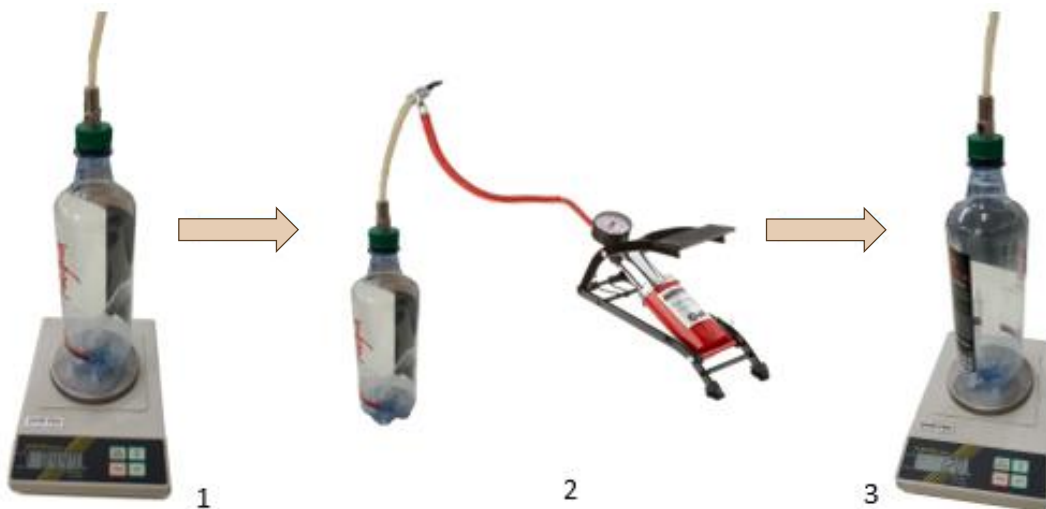


Figura 149 Esquema del muntatge per determinar experimentalment la densitat de l'aire

5.4 PROCEDIMENT

Per tal de trobar la densitat de l'aire només cal seguir aquests senzills passos (que podeu trobar il·lustrats en l'anterior apartat):

1. Primer de tot es col·loca la xeringa (ja taponada) dins de la botella i es tapa (amb el tap que ja inclou la vàlvula antiretorn). A continuació el conjunt es col·loca damunt la bàscula i s'obté així la massa del recipient (84,7g). Ara només queda tarar la bàscula.
2. Després d'obtenir la massa del recipient, es duplica la pressió en l'interior de la botella mitjançant la introducció d'aire (amb la bomba d'aire). Així doncs (com ja s'ha explicat en la descripció de l'experiment), el volum de la xeringa ha de reduir-se a la meitat. Passarà d'indicar 5,0 mL de volum a indicar-ne 2,5.

$$V_0 = 5,0\text{mL} \rightarrow P_0 = 1\text{atm}$$

$$V = 2,5\text{mL} \rightarrow P = 2\text{atm}$$

$$T_0 = T \text{ (constant)}$$



Figura 150 Diferència entre el volum de la xeringa abans i després d'introduir aire

3. Finalment, es posa de nou la botella (una vegada s'ha introduït l'aire) damunt la bascula. La massa que indiqui serà la massa d'aire (1,2g/L) que hi ha en un litre.

5.5 RESULTATS OBTINGUTS ANÀLISI I DISCUSSIÓ

A partir del procediment anterior, s'ha obtingut que la massa d'aire que hi ha en un litre és

- Mostra 1: $\rho = 1,18 \text{ g/L} = 1,18 \text{ kg/m}^3$
- Mostra 2: $\rho = 1,20 \text{ g/L} = 1,20 \text{ kg/m}^3$
- Mostra 3: $\rho = 1,22 \text{ g/L} = 1,22 \text{ kg/m}^3$

per tant, fent la mitjana dels anteriors resultats, la densitat de l'aire és: $\rho = (1,20 \pm 0,01) \text{ kg/m}^3$



Figura 151 Densitat de l'aire= 1,20g/L

6. DETERMINACIÓ EXPERIMENTAL DE LA GRAVETAT

6.1 DESCRIPCIÓ DE L'EXPERIMENT

En aquest experiment es determinarà experimentalment la força de la gravetat que actua en una pilota de bàsquet quan es deixa caure mitjançant les dades recollides pel programari Multilab (a costa d'un sensor de posició).

6.2 UTILLATGE

L'utiltatge necessari per determinar experimentalment la densitat de l'aire, és el següent (vegeu el seu muntatge en el següent apartat):

- Programari lliure Multilab Fourier System^[51]
- Pilota de bàsquet
- Sensor de posició
- Consola USB-LOG



Figura 152 D'esquerra a dreta: Consola USB-LOG (permet la connexió i traspàs de 4 sensors a l'ordinador) i sensor posició (recull les dades posició-temps mitjançant la propagació d'ones que xoquen en l'objecte a estudiar i retornen al sensor en forma d'eco)

6.3 DIBUIX DEL MUNTATGE






En aquest apartat es mostra en un esquema el muntatge de l'utiltatge per tal de trobar la força de la gravetat.

Tal i com es pot veure el sensor de força ha d'estar totalment perpendicular a la caiguda de la pilota, ja que si no les ones que retornen al sensor no són vàlides.

Figura 153 Muntatge i connexió dels diferents dispositius a l'ordinador (vegeu les figures de l'utiltatge per distingir la funció de cada aparell en l'experimentació)


6.4 PROCEDIMENT

Per tal d'enregistrar les dades que posteriorment s'estudiaran, s'han de seguir els següents passos:

1. Es munta el material (sensor de posició, consola i ordinador) tal i com es mostra en l'esquema del muntatge (apartat 6.3)
2. Abans de configurar, cal assegurar-se que el sensor de moviment es troba perpendicular al terra.
3. Tot seguit es configura el Multilab (amb la pestanya emergent "ajudant de configuració" ) per tal que reculli les dades apropiadament:
 - a. **Pas 1 de 3:** Primer de tot es seleccionen els sensors connectats a l'ordinador (sensor posició).
 - b. **Pas 2 de 3:** s'escull la freqüència d'enregistrament de les dades (25 mostres per segon).
 - c. **Pas 3 de 3:** per acabar, es selecciona que el període de captació de dades sigui continu.
4. Finalment, una vegada el programa ja està preparat, ja es poden recollir les dades. El que s'ha de fer és deixar la caure la pilota, totalment perpendicular al sensor (i deixant una distància de 10cm) just quan s'inicia el programa . Quan la pilota deixi de botar es finalitza la recollida de dades .
5. Convé repetir el procediment tres vegades.

6.5 RESULTATS OBTINGUTS, ANÀLISI I DISCUSSIÓ

A partir de les gràfiques obtingudes pel programari, es podrà determinar la gravetat mitjançant una sèrie d'ajustaments en les gràfiques. Vegeu com s'editen amb una de les rèpliques:

1. Primer de tot es commuten els cursors  en l'interval que la gràfica és una corba (caiguda lliure). Tant se val si es quan la pilota cau, puja (després de rebotar) o els dos trams.

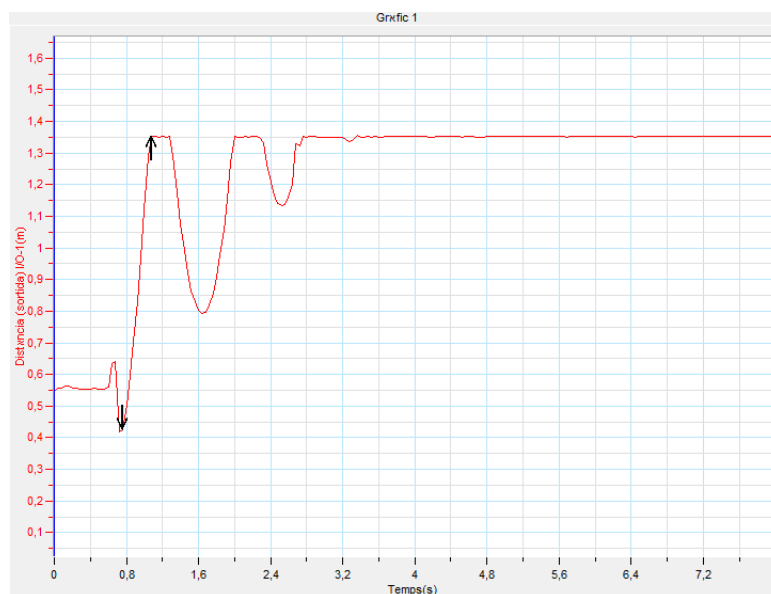


Figura 154 Cursors en l'interval de temps que la pilota cau en el bot inicial

2. A continuació, es retallen les dades, obrint la pestanya “gràfic” (**Gràfic**) i seleccionant l’opció “retalla” (**Retalla**). D’aquesta forma s’obtindrà una gràfica de la corba seleccionada.

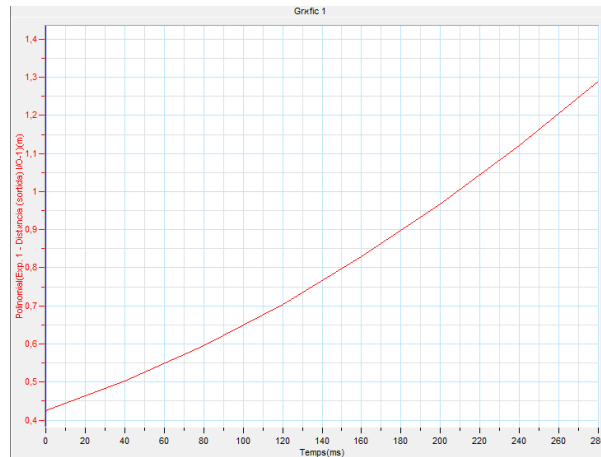


Figura 155 Gràfica obtinguda al retallar la corba seleccionada

3. Ara, cal ajustar la gràfica a una paràbola. Per fer-ho, s’obra la pestanya “Anàlisi” (**Anàlisi**) i es tria el subapartat “ajudant d’anàlisi”. Llavors en el requadre emergent (també anomenat “ajudant d’anàlisi”) cal triar en el subapartat “tipus”: Polinomial i d’ordre 2.

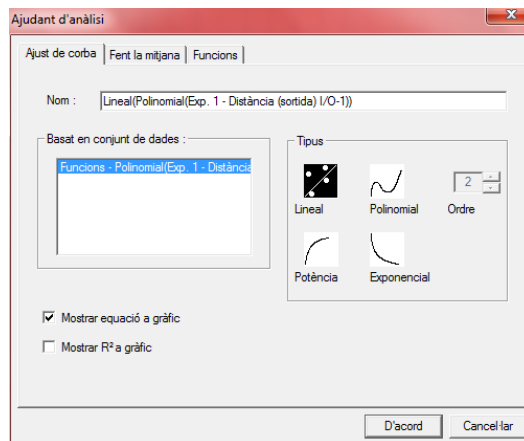
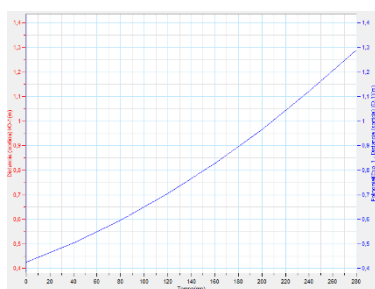


Figura 156 Ajut d'anàlisi

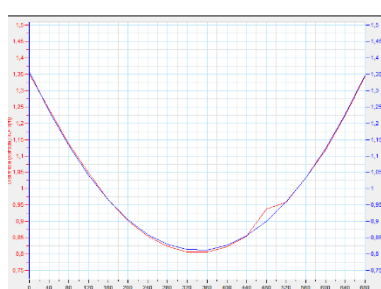
4. Finalment, s’obtindrà la gràfica ajustada a una paràbola i la seva equació corresponent, amb la qual es podrà determinar la gravetat.

A continuació es mostren les tres gràfiques obtingudes amb la seves respectives equacions:



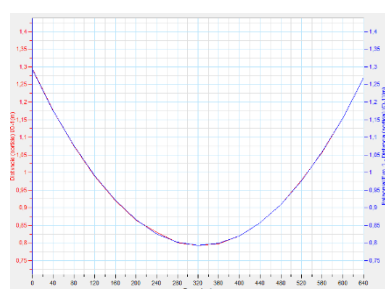
$$f(x) = +4.88X^2 + 1.75X + 0.43$$

Figura 157 Mostra 1



$$f(x) = +4.98X^2 - 3.20X + 1.36$$

Figura 158 Mostra 2



$$f(x) = +4.76X^2 - 3.084X + 1.29$$

Figura 159 Mostra 3

Tenint en compte que el tram analitzat es correspon a una caiguda lliure, i que l'equació de la caiguda lliure és:

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2 \quad \leftrightarrow \quad y = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x = t \quad (s) \\ a = y_0 \quad (m) \\ b = v_0 \quad (m/s) \\ c = \frac{g}{2} \quad (m/s^2) \end{array} \right.$$

Només cal fer un canvi de variables en les equacions de les gràfiques obtingudes per tal de determinar la gravetat experimentalment. Sabent que:

- Mostra 1: $c = \frac{g}{2} = 4,88 \rightarrow g = 2 \cdot 4,88 = 9,8 \text{ m/s}^2$
- Mostra 2: $c = \frac{g}{2} = 4,98 \rightarrow g = 2 \cdot 4,98 = 10,0 \text{ m/s}^2$
- Mostra 3: $c = \frac{g}{2} = 4,77 \rightarrow g = 2 \cdot 4,76 = 9,5 \text{ m/s}^2$

Fent la mitjana dels anteriors resultats, s'obté que la gravetat (determinada de forma experimental) equival a:

$$g = \frac{9,8 + 9,5 + 10,0}{3} = (9,8 \pm 0,2) \text{ m/s}^2$$

7. DETERMINACIÓ EXPERIMENTAL DEL COEFICIENT AERODINÀMIC I LA FORÇA DE FRICCIÓ AERODINÀMICA

7.1 CAIGUDA DE L'HELICÒPTER

Quan el rotor de l'helicòpter cau^[57], està sotmès a l'acció de dues forces: el pes (P) i la força de fricció aerodinàmica (\vec{F}) que actua en una direcció perpendicular a les dues ales, oposant-se al moviment de descens.

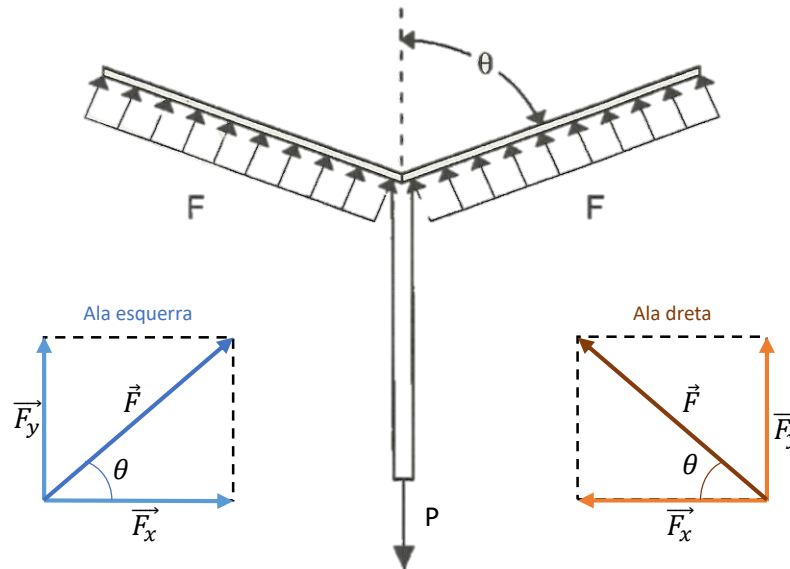


Figura 160 Les forces de pes i de fricció aerodinàmica estan en equilibri [50]

La força \vec{F} es pot expressar com:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = F \cdot \cos \theta \\ F_y = F \cdot \sin \theta \end{array} \right.$$

essent θ l'angle que forma l'ala amb la vertical.

La suma de forces a l'eix X és zero. Aquestes forces no produeixen translació, però sí rotació ja que formen un parell de forces i fan que el rotor giri amb una velocitat angular (ω).

A l'eix Y, la força total que exerceix l'aire sobre les ales serà la suma de cadascuna de les 2 components F_y :

$$F_{total} = F_y + F_y = 2F_y = 2F \cdot \sin \theta$$

A la força total (F_{total}) l'anomenarem força de fricció aerodinàmica (F_D). Aquesta resistència o fregament que oposa l'aire depèn de la velocitat relativa de l'helicòpter respecte del fluid i es pot modelar depenent del tipus de flux que es crea al voltant del cos (laminar, turbulent o de transició).

Al tractar-se de la caiguda de l'helicòpter en l'aire el flux és turbulent (l'aire és poc viscos) i es sol modelar amb la llei de fregament de Newton segons l'expressió:

$$F_D = \frac{1}{2} \cdot C_D \cdot \rho \cdot A_f \cdot v^2$$

On intervé la densitat de l'aire (ρ), l'àrea frontal de l'objecte (A_f), el coeficient aerodinàmic (C_D) i la velocitat de caiguda al quadrat. El coeficient aerodinàmic és un número adimensional. El producte de l'àrea frontal (A_f) pel coeficient aerodinàmic és l'àrea efectiva ($A_{efectiva}$).

7.2 HIPÒTESIS

La densitat de l'aire es considera invariable amb l'altura des de que es tiren els helicòpters de paper.

Si apliquem la segona llei de Newton:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

És fàcil veure a l'equació que la velocitat de l'helicòpter s'incrementarà un moment

$$P - F_D = ma \quad \rightarrow \quad mg - F_D = ma$$

$$a = \frac{mg - F_D}{m} = g - \frac{\frac{1}{2} \cdot C_D \cdot \rho \cdot A_f \cdot v^2}{m}$$

On la força de resistència de l'aire s'igualarà al pes de l'helicòpter de paper i l'acceleració de caiguda serà nul·la. La velocitat límit a la que el helicòpter s'estabilitzarà s'anomena **velocitat terminal**.

$$v_{terminal} = constant \rightarrow a = 0 \rightarrow \sum F = 0 \rightarrow F_D = P$$

Si es coneix la velocitat terminal^[58] es pot determinar el coeficient aerodinàmic^[59]

$$0 = g - \frac{\frac{1}{2} \cdot C_D \cdot \rho \cdot A_f \cdot v_{terminal}^2}{m}$$

$$C_D = \frac{2mg}{\rho_{aire} \cdot A_f \cdot V_{terminal}^2}$$

Per calcular l'àrea frontal (A_f) hem de conèixer la superfície (S) de cadascuna de les ales, el radi de gir, i l'angle que formen les ales amb la vertical (θ)

$$S = L \cdot W \quad R^2 = L^2 + W^2$$

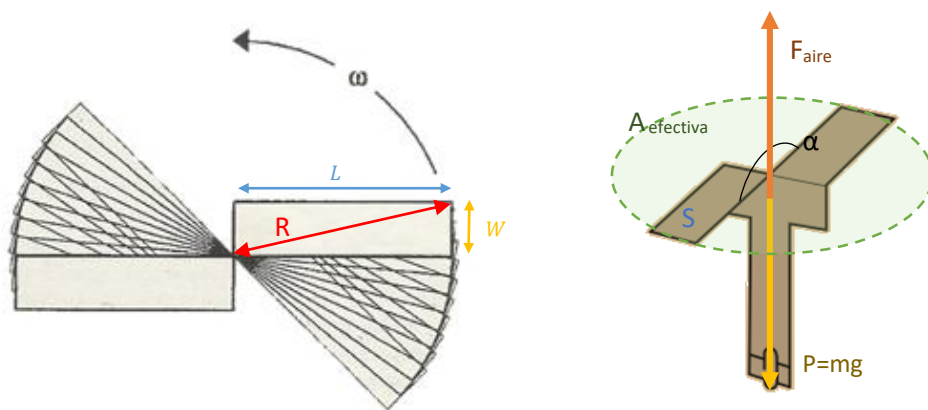


Figura 161 l'àrea efectiva del rotor depèn de la velocitat angular: vista aèria [50] i vista frontal

Quan el rotor gira cada ala descriu un cercle de radi $(L^2 + W^2)$.

La superfície projectada per cadascuna de les ales és

$$S_{projectada} = \pi(L^2 + W^2) \cdot \sin \theta$$

Amb la que l'àrea frontal (A_f) serà la suma de dues superfícies

$$A_f = 2 \cdot S_{projectada} = 2\pi \cdot (L^2 + W^2) \cdot \sin \theta$$

D'aquesta manera podem calcular els diferents coeficients aerodinàmics per a diferents angles

$$C_D = \frac{2mg}{\rho_{aire} \cdot 2\pi \cdot (L^2 + W^2) \cdot \sin \theta \cdot v_{terminal}^2}$$

$$C_D = \frac{mg}{\rho_{aire} \cdot \pi \cdot (L^2 + W^2) \cdot \sin \theta \cdot v_{terminal}^2}$$

7.3 VARIACIÓ DE LA MASSA

Aprofitant els resultats obtinguts en l'apartat 4.5.1.3 (on s'ha determinat la velocitat terminal que assoleix cadascun dels helicòpters de paper de diferent massa), 5 (on s'ha determinat la densitat de l'aire) i 6 (on s'ha determinat la gravetat terrestre), es calcularà el coeficient aerodinàmic i la força de fricció aerodinàmica dels respectius helicòpters. Vegeu-ne les seves característiques a continuació:

Helicòpter de paper	Massa (m)	Longitud ala (L)	Amplada ala (W)	Angle d'obertura (α)	Angle respecte la vertical (θ)	Velocitat terminal ($v_{terminal}$)
1	0,77 g	0,070 m	0,015 m	120°	60°	1,06 m/s
2	1,21 g	0,070 m	0,015 m	120°	60°	1,29 m/s
3	1,65 g	0,070 m	0,015 m	120°	60°	1,49 m/s
4	2,11 g	0,070 m	0,015 m	120°	60°	1,65 m/s

Taula 11 Característiques dels helicòpters de paper de diferent massa

7.3.1 Càlcul del coeficient aerodinàmic

A partir de l'equació derivada, $\left(C_D = \frac{mg}{\rho_{aire} \cdot \pi \cdot (L^2 + W^2) \cdot \sin \theta \cdot v_{terminal}^2}\right)$ es pot calcular el coeficient aerodinàmic d'aquests helicòpters:

$$C_{D1} = \frac{0,00077 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 60 \cdot 1,06^2} = 0,40$$

$$C_{D2} = \frac{0,00121 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 60 \cdot 1,29^2} = 0,43$$

$$C_{D3} = \frac{0,00165 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 60 \cdot 1,49^2} = 0,44$$

$$C_{D4} = \frac{0,00211 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 60 \cdot 1,65^2} = 0,45$$

No s'observen diferències significatives en els coeficients aerodinàmics, la qual cosa vol dir que aquest és independent de la massa i només depèn de la geometria de l'helicòpter.

Val a dir, que aquests resultats es poden veure afectats tant per la influència de la velocitat terminal, com per l'obertura de les ales en el seu moviment descendent (tal i com s'ha observat a l'hora de fer els experiments).

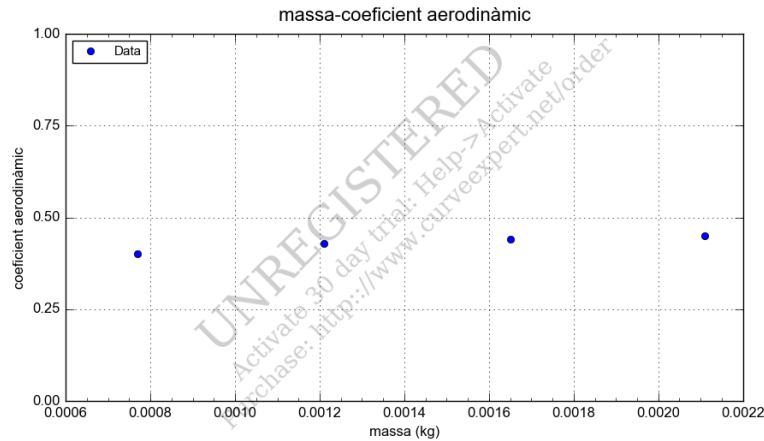


Figura 162 Relació entre la massa i el coeficient aerodinàmic

7.3.2 Càlcul de la força de fricció aerodinàmica

A partir de les equacions derivades ($F_D = C_D \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot (L^2 + W^2) \cdot \sin \theta \cdot v^2$), i sabent els coeficients aerodinàmics dels respectius helicòpters, es pot calcular la força de fricció aerodinàmica:

$$F_{D1} = 0,40 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 60 \cdot 1,06^2 = 0,0075 \text{ N}$$

$$F_{D2} = 0,43 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 60 \cdot 1,29^2 = 0,012 \text{ N}$$

$$F_{D3} = 0,44 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 60 \cdot 1,49^2 = 0,016 \text{ N}$$

$$F_{D4} = 0,45 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 60 \cdot 1,65^2 = 0,020 \text{ N}$$

S'observa que amb l'augment de la massa, el valor de la força de fricció aerodinàmica augmenta, segons una regressió lineal. La raó d'aquests valors pot ser donada per la influència de les velocitats.

$$F_D = 5,26 \cdot 10^{-4} + 0,93m$$

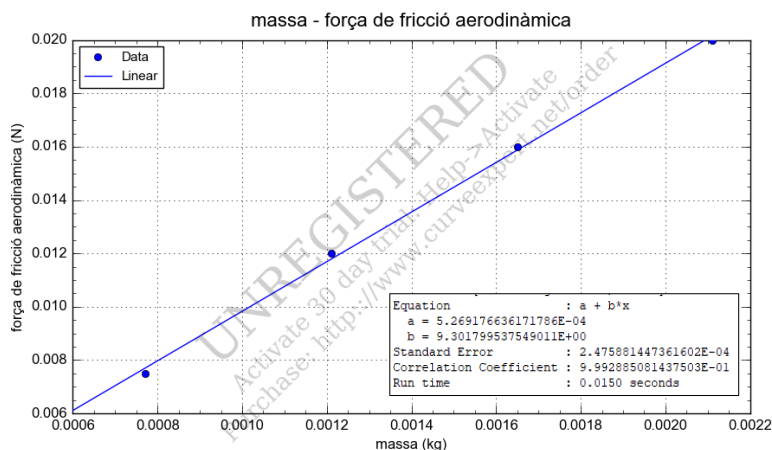


Figura 163 Relació entre la massa i el coeficient aerodinàmic

7.3 VARIACIÓ DE L'ANGLE D'OBERTURA

Aprofitant els resultats obtinguts en l'apartat 4.5.2.3 (on s'ha determinat la velocitat terminal que assoleix cadascun dels helicòpters de paper de diferent angle d'obertura), 5 (on s'ha determinat la densitat de l'aire) i 6 (on s'ha determinat la gravetat terrestre), es calcularà el coeficient aerodinàmic dels respectius helicòpters. Vegeu-ne les seves característiques a continuació:

Helicòpter de paper	Massa (m)	Longitud ala (L)	Amplada ala (W)	Angle d'obertura (α)	Angle respecte la vertical (θ)	Velocitat terminal ($v_{terminal}$)
5	0,79 g	0,070 m	0,015 m	180°	90°	-
6	0,79 g	0,070 m	0,015 m	150°	75°	1,22 m/s
7	0,79 g	0,070 m	0,015 m	120°	60°	1,24 m/s
8	0,79 g	0,070 m	0,015 m	90°	45°	1,26 m/s
9	0,79 g	0,070 m	0,015 m	60°	30°	1,29 m/s
10	0,79 g	0,070 m	0,015 m	30°	15°	1,36 m/s

Taula 12 Característiques dels helicòpters de paper de diferent angle d'obertura

7.3.1 Càlcul del coeficient aerodinàmic

A partir de l'equació derivada, $\left(C_D = \frac{mg}{\rho_{aire} \cdot \pi \cdot (L^2 + W^2) \cdot \sin \theta \cdot v_{terminal}^2}\right)$ es pot calcular el coeficient aerodinàmic d'aquests helicòpters:

$$C_{D6} = \frac{0,00079 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 75 \cdot 1,22^2} = 0,28$$

$$C_{D7} = \frac{0,00079 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 60 \cdot 1,24^2} = 0,30$$

$$C_{D8} = \frac{0,00079 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 45 \cdot 1,26^2} = 0,35$$

$$C_{D9} = \frac{0,00079 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 30 \cdot 1,29^2} = 0,48$$

$$C_{D10} = \frac{0,00079 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 15 \cdot 1,36^2} = 0,84$$

S'observa que amb la disminució de l'angle d'obertura, el valor del coeficient aerodinàmic augmenta, segons una regressió polinòmica de segon grau:

$$1,21 - 1,51 \cdot 10^{-2} \alpha + 6,03 \alpha^2$$

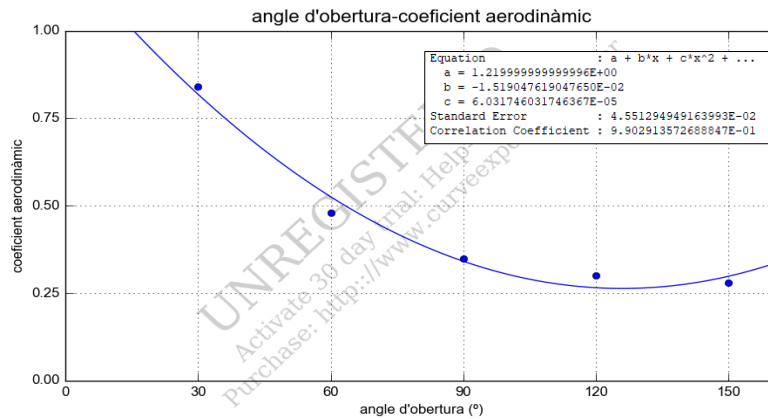


Figura 164 Relació entre l'angle d'obertura i el coeficient aerodinàmic

7.3.2 Càlcul de la força de fricció aerodinàmica

A partir de les equacions derivades ($F_D = C_D \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot (L^2 + W^2) \cdot \sin \theta \cdot v^2$), i sabent els coeficients aerodinàmics dels respectius helicòpters, es pot calcular la força de fricció aerodinàmica:

$$F_{D_6} = 0,28 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 75 \cdot 1,22^2 = 0,078 \text{ N}$$

$$F_{D_7} = 0,30 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 60 \cdot 1,24^2 = 0,075 \text{ N}$$

$$F_{D_8} = 0,35 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 45 \cdot 1,26^2 = 0,076 \text{ N}$$

$$F_{D_9} = 0,48 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 30 \cdot 1,29^2 = 0,077 \text{ N}$$

$$F_{D_{10}} = 0,84 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 15 \cdot 1,36^2 = 0,078 \text{ N}$$

No s'observen diferències significatives en els valors de la força de fricció aerodinàmica

Val a dir, que aquests resultats es poden veure afectats tant per la influència de la velocitat terminal, com per l'obertura de les ales en el seu moviment descendent (tal i com s'ha observat a l'hora de fer els experiments):

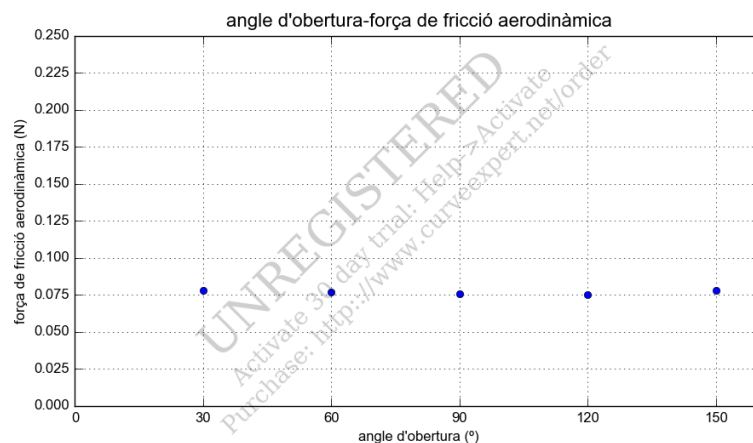


Figura 165 Relació entre la força de fricció aerodinàmica i l'angle d'obertura

7.4 VARIACIÓ DE LA LONGITUD DE LES ALES

Aprofitant els resultats obtinguts en l'apartat 4.5.3.3 (on s'ha determinat la velocitat terminal que assoleix cadascun dels helicòpters de paper de diferent longitud d'ala), 5 (on s'ha determinat la densitat de l'aire) i 6 (on s'ha determinat la gravetat terrestre), es calcularà el coeficient aerodinàmic dels respectius helicòpters. Vegeu-ne les seves característiques a continuació:

Helicòpter de paper	Massa (m)	Longitud ala (L)	Amplada ala (W)	Angle d'obertura (α)	Angle respecte la vertical (θ)	Velocitat terminal ($v_{terminal}$)
11	0,75 g	0,010 m	0,015 m	90°	45°	-
12	0,75 g	0,020 m	0,015 m	90°	45°	-
13	0,75 g	0,030 m	0,015 m	90°	45°	-
14	0,75 g	0,040 m	0,015 m	90°	45°	2,14 m/s
15	0,75 g	0,050 m	0,015 m	90°	45°	1,77 m/s
16	0,75 g	0,060 m	0,015 m	90°	45°	1,67 m/s
17	0,75 g	0,070 m	0,015 m	90°	45°	1,27 m/s

Taula 13 Característiques dels helicòpters de paper de diferent longitud d'ala

7.4.1 Càlcul del coeficient aerodinàmic

A partir de l'equació derivada, $\left(C_D = \frac{mg}{\rho_{aire} \cdot \pi \cdot (L^2 + W^2) \cdot \sin \theta \cdot v_{terminal}^2}\right)$ es pot calcular el coeficient aerodinàmic d'aquests helicòpters:

$$C_{D14} = \frac{0,00075 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,040^2 + 0,015^2) \cdot \sin 45 \cdot 2,14^2} = 0,33$$

$$C_{D15} = \frac{0,00075 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,050^2 + 0,015^2) \cdot \sin 45 \cdot 1,77^2} = 0,32$$

$$C_{D16} = \frac{0,00075 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,060^2 + 0,015^2) \cdot \sin 45 \cdot 1,67^2} = 0,26$$

$$C_{D17} = \frac{0,00075 \cdot 9,8}{1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 45 \cdot 1,27^2} = 0,33$$

Per helicòpters de la mateixa massa i amb el mateix angle d'obertura, el coeficient aerodinàmic és independent de la longitud de l'ala.

Val a dir, que aquests resultats es poden veure afectats tant per la influència de la velocitat terminal, com per l'obertura de les ales en el seu moviment descendent (tal i com s'ha observat a l'hora de fer els experiments).

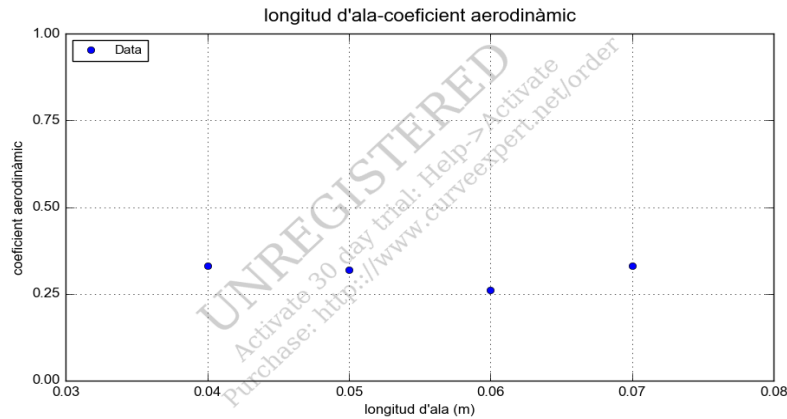


Figura 166 relació entre el coeficient aerodinàmic i la longitud de l'ala

7.4.2 Càlcul de la força de fricció aerodinàmica

A partir de les equacions derivades ($F_D = C_D \cdot \rho \cdot 2\pi \cdot (L^2 + W^2) \cdot \sin \theta \cdot v^2$), i sabent els coeficients aerodinàmics dels respectius helicòpters, es pot calcular la força de fricció aerodinàmica:

$$F_{D14} = 0,33 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,040^2 + 0,015^2) \cdot \sin 45 \cdot 2,14^2 = 0,074 \text{ N}$$

$$F_{D15} = 0,32 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,050^2 + 0,015^2) \cdot \sin 45 \cdot 1,77^2 = 0,073 \text{ N}$$

$$F_{D16} = 0,26 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,060^2 + 0,015^2) \cdot \sin 45 \cdot 1,67^2 = 0,074 \text{ N}$$

$$F_{D17} = 0,33 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot (0,070^2 + 0,015^2) \cdot \sin 45 \cdot 1,27^2 = 0,073 \text{ N}$$

No s'observen diferències significatives en els valors de la força de fricció aerodinàmica.

Val a dir, que aquests resultats es poden veure afectats tant per la influència de la velocitat terminal, com per l'obertura de les ales en el seu moviment descendent (tal i com s'ha observat a l'hora de fer els experiments).

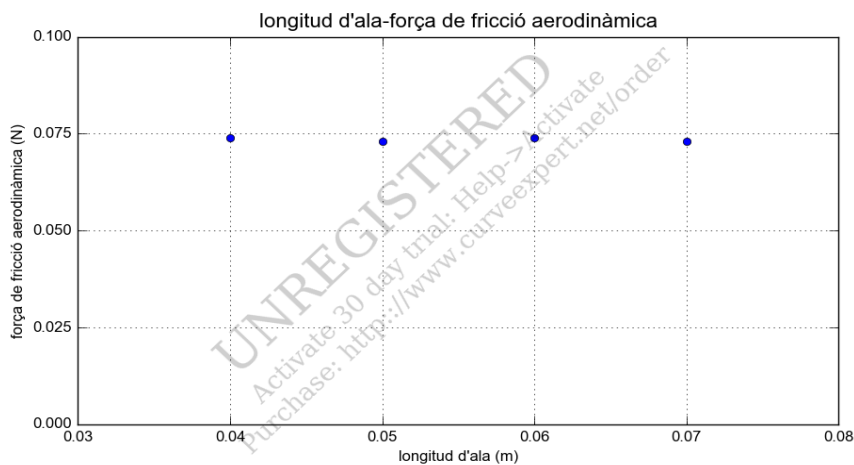


Figura 167 Relació entre la longitud de l'ala i la força de fricció aerodinàmica

8. INTERPRETACIÓ DEL MOVIMENT DE CAIGUDA AMB AUTOROTACIÓ DE L'HELICÒPTER DE PAPER I LES SÀMARES

Quan el rotor de l'helicòpter cau, està sotmès a l'acció de dues forces: el pes (P) i la força de fricció aerodinàmica (\vec{F}) que actua en una direcció perpendicular a les dues ales, oposant-se al moviment de descens.

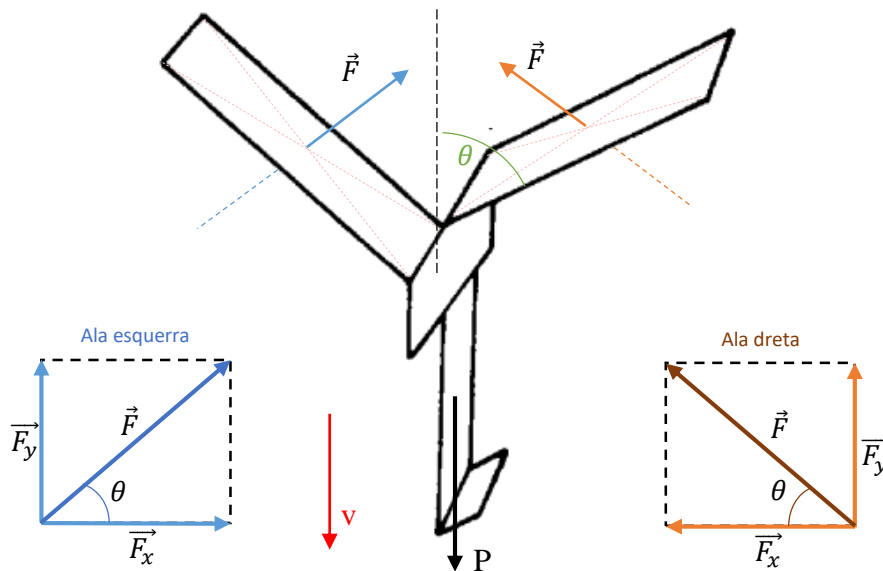


Figura 168 Les forces de pes i de fricció aerodinàmica estan en equilibri [52]

La força \vec{F} es pot expressar com:

$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x = F \cdot \cos \theta \\ F_y = F \cdot \sin \theta \end{array} \right.$$

essent θ l'angle que forma l'ala amb la vertical.

La suma de forces a l'eix X és zero. Aquestes forces no produeixen translació, però sí rotació ja que formen un parell de forces i fan que el rotor giri amb una velocitat angular (ω).

La força \vec{F} crea un moment (\vec{M}) definit per:

$$\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{F} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \text{vector radi de gir} \\ \vec{F} = \text{força que actua sobre el centre de posicions de l'ala} \end{array} \right.$$

Degut a la força que de l'aire que actua sobre les ales (\vec{F}) hauria de tancar les ales. S'observa experimentalment per contra, una obertura de les ales, i per tant, un augment de la superfície projectada per les dues ales. Aquesta obertura s'explica degut al moment que genera la força centrípeta de l'ala quan està en rotació, que provoca que augmenti el seu radi de gir.

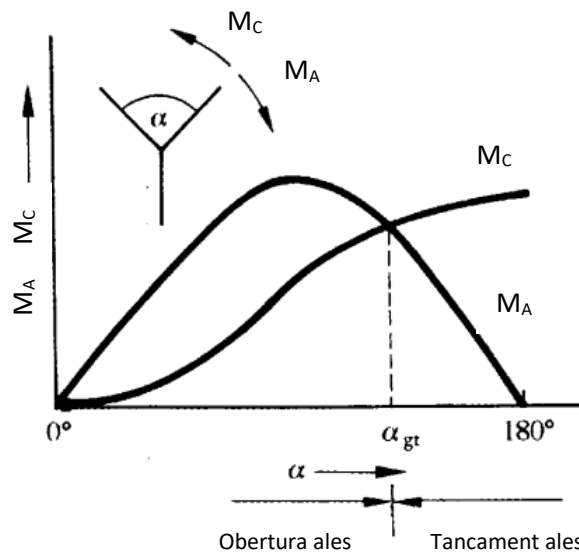


Figura 169 Representació de la grandària dels parells M_A i M_C en funció de l'angle d'obertura α . En petits angles, el parell M_A que obre les fulles predomina primer. Posteriorment dominat per l'aleró de parell de tancament M_C . La interacció d'ambdós parells condueix a l'ajust d'un angle d'obertura estacionari α_{st} . [52]

L'explicació d'aquest fenomen és complexa però com diu l'article (*Der Flug des geflügelten Samens*^[52]) per a petits angles el moment generat per la força de fricció de l'aire (M_A) predomina primer. Posteriorment per a grans angles predomina el moment generat per la força centrípet (M_C). La interacció dels dos moments provoca l'assoliment d'un angle d'obertura estacionari.

Mitjançant la rotació, el rotor de l'helicòpter aconsegueix exposar de manera òptima la superfície de l'ala i minimitzar la velocitat de descens. D'aquesta manera la llavor (el rotor de l'helicòpter) roman relativament llarg en l'aire i obté l'oportunitat de ser portat

pels vents lluny de l'arbre. En el sentit del darwinisme, aquest és un prerrequisit important per una major difusió de l'espècie.

Una altra manera d'interpretar la disminució de velocitat de caiguda^[53] a partir del moment en que la sàmara assoleix una velocitat angular constant és perquè amb la rotació les sàmares generen suficient força de sustentació mitjançant la formació d'un vòrtex estable damunt la vora d'atac (*leading-edge vòrtex*, LEV)^{[54] [55]}; aquest fenomen permet a aquestes estructures voladores romandre en l'aire més temps que qualsevol altra varietat de llavor no rotant.

9. CONCLUSIONS

A partir de l'estudi realitzat sobre el moviment de caiguda d'un helicòpter de paper i de sàmares estem en condicions d'afirmar que:

1. La recerca bibliogràfica ha possibilitat conèixer les lleis implicades en el vol dels objectes.
2. S'ha confeït un herbari amb les principals espècies del nostre territori.
3. El moviment dels helicòpters i de les llavors consta de dos trams, el primer s'assimila a una caiguda lliure. En canvi, el segon tram es correspon al moment en el qual els dos cossos assoleixen una velocitat constant.
4. En el moviment descendent de les llavors, s'observa un augment de la obertura de les ales degut al moment que genera la força centrípeta de l'ala quan està en rotació, que provoca que augmenti el seu radi de gir.
5. S'han pogut estudiar satisfactòriament els fotogrames enregistrats per una càmera de vídeo (de la vista aèria i lateral del moviment descendent de l'helicòpter de paper) mitjançant el programari Tracker, i analitzar-ne els resultats.
6. Pel que fa al vol dels helicòpters de diferents masses s'observa que:
 - a. Com més petita sigui la massa (m), més petita és la velocitat terminal (v).
 - b. Com més petita sigui la massa (m), més gran és el període de rotació (T) i, per tant, més petita és la velocitat angular (w).
 - c. Tant la velocitat terminal com el període de rotació assoleixen el seu valor constant en el mateix interval de temps (en els casos estudiats entre els 0,6 i 0,8s). Per tant, hi ha una relació entre l'establiment de les velocitats angulars i terminals constants.
 - d. Hi ha una dependència lineal entre la massa i la velocitat terminal al quadrat ($v^2 = 0,21 + 1,20m$). Aquesta dependència igualment justifica que la força de l'aire també depèn de la velocitat terminal al quadrat.
7. Quant al vol dels helicòpters de paper de diferent angle d'obertura, s'observa que:
 - a. Com més gran sigui l'angle d'obertura (α), més petita és la velocitat terminal (v).
 - b. Com més pet sigui l'angle d'obertura (α), més gran és el període de rotació (T) i, per tant, més petita és la velocitat angular (w).
 - c. Tant la velocitat terminal com el període de rotació assoleixen el seu valor constant en el mateix interval de temps (en els casos estudiats entre els 0,6 i 0,8s). Per tant, hi ha una relació entre l'establiment de les velocitats angulars i terminals constants.
 - d. L'helicòpter de paper de 180° no assoleix un moviment descendent estable.
8. En relació amb els helicòpters de paper de diferent longitud d'ala, s'observa que:
 - a. Com més gran sigui la longitud de l'ala (L), més petita és la velocitat terminal (L).
 - b. Com més gran sigui la longitud de l'ala (L), més gran és el període de rotació (T) i, per tant, més petita és la velocitat angular (w).

- c. Els helicòpters de paper de longitud d'ala entre 1,00 i 3,00 cm no assolixen una velocitat terminal ja que no generen suficient força de resistència amb l'aire i, per tant el seu moviment de caiguda és compatible amb un MRUA i no pas un MRU.
 - d. Tant la velocitat terminal com el període de rotació assolixen el seu valor constant en el mateix interval de temps (en els casos estudiats [helicòpter entre 4,0 i 7,0 cm de longitud d'ala] entre els 0,6 i 0,8s). Per tant, hi ha una relació entre l'establiment de les velocitats angulars i terminals constants.
9. S'ha fet una estimació experimental de la densitat de l'aire i el valor trobat és $\rho = (1,20 \pm 0,1) \text{ kg/m}^3$.
10. S'ha determinat experimentalment el valor de l'acceleració de la gravetat i el valor trobat és $g = (9,8 \pm 0,2) \text{ m/s}^2$.
11. S'ha determinat experimentalment el coeficient aerodinàmic dels helicòpters de paper en els seu moviment de caiguda.
- a. Per helicòpters de la mateixa superfície d'ala i angle d'obertura, el coeficient aerodinàmic és independent de la massa i només depèn de la geometria de l'helicòpter.
 - b. Per helicòpters de la mateixa massa i longitud d'ala, s'observa un augment del valor del coeficient aerodinàmic, amb la disminució de l'angle d'obertura, segons l'equació $1,21 - 1,51 \cdot 10^{-2} \alpha + 6,03 \alpha^2$.
 - c. Per helicòpters de la mateixa massa i angle d'obertura, el coeficient aerodinàmic és independent de la longitud de l'ala.
12. S'ha determinat experimentalment la força de fricció de l'aire que actua en els helicòpters de paper en el seu moviment de caiguda.
- a. No s'observen diferències significatives en els valors de la força de fricció aerodinàmica per helicòpters de la mateixa superfície d'ala i massa (diferent angle d'obertura). La raó d'aquests valors pot ser donada per la influència de les velocitats.
 - b. S'observa que amb l'augment de la massa (i l'angle d'obertura i la longitud d'ala iguals), el valor de la força de fricció aerodinàmica augmenta, segons una regressió lineal ($F_D = 5,26 \cdot 10^{-4} + 9,30m$). La raó d'aquests valors pot ser donada per la influència de les velocitats.
 - c. No s'observen diferències significatives en els valors de la força de fricció aerodinàmica per helicòpters de la mateixa superfície massa i angle d'obertura (diferent longitud d'ala). La raó d'aquests valors pot ser donada per la influència de les velocitats.
13. S'ha interpretat la causa que fa que l'helicòpter giri
- a. El parell de forces que actuen en les ales són les que provoquen que l'enginy giri amb una velocitat angular (w).
 - b. Mitjançant la rotació, el rotor de l'helicòpter aconsegueix minimitzar la velocitat de descens (ja que aconsegueix exposar de manera òptima la superfície de l'ala) i, per tant, la llavor/helicòpter es sustenta en l'aire durant un interval de temps més llarg.

Després d'endinsar-me en un dels fenòmens físics que encara presenta molts interrogants (la caiguda amb autorotació de les sàmares), una de les meves conclusions és que la física que ens rodeja pot ser estudiada amb una metodologia a l'abast de qualsevol ment curiosa.

Altrament, aquest treball, que vaig començar a principis de juny del 2018, m'ha permès adonar-me amb els meus propis ulls, que els dos àmbits de la ciència que sempre m'han apassionat (la biologia i la física), no són independents l'un de l'altre, sinó que van lligats de la mà. Així doncs, estudiar-ne un implica alhora analitzar l'altre.

Durant la realització d'aquest projecte m'he trobat amb múltiples dificultats i limitacions que m'han complicat la investigació, algunes de les quals he aconseguit superar i altres no. Tanmateix, estic molt satisfeta de totes i cadascuna de les decisions que he pres al llarg de la meva recerca ja que totes elles m'han servit per aprendre alguna cosa, a part de, permetre'm assolir els meus objectius.

D'una banda, vaig haver de recuperar el meu alemany oxidat per poder comprendre, tot i que amb dificultats, les principals fonts bibliogràfiques que han sigut el punt de partida del meu treball. Altrament, també em va suposar un esforç afegit aprendre a explicar algun dels conceptes físics que fins ara desconeixia i no es treballen a batxillerat.

D'altra banda, la utilització del mòbil al principi de la investigació em va crear alguns problemes a l'hora d'analitzar el moviment dels helicòpters de velocitat terminal més gran. Amb la qual cosa, vaig haver de buscar una altra càmera que em permetés captar més fotogrames per segon.

Endemés, en la anàlisi dels vídeos, no he pogut controlar l'angle d'obertura final de les ales, ja que el moviment de rotació comporta l'obertura d'aquestes. Conseqüentment, alguns dels resultats s'han vist afectats.

Un altre dels inconvenients més rellevants, per ser la causa de moltes de les anècdotes i experiències acumulades, ha estat la recol·lecta de les diverses llavors mostrades en l'herbari. Per un costat, no podia sortir de casa sense una motxilla, ja que moltes eren les vegades que per casualitat em trobava un arbre amb aquestes característiques llavors. De fet, freqüentment feia parar els meus amics pel carrer perquè m'ajudessin a enfil·lar-me (posant en risc la meua i la seva seguretat) a un arbre i així agafar una de les meves preuades mostres. Per un altre costat, les plagues i el clima de Lleida han fet que algunes de les mostres no estiguin amb condicions idònies per ser conservades.

Finalment cal destacar, el temps, ja que aquest és un estudi que obra línies de recerca de molts àmbits que m'hauria agradat poder investigar, tots i cadascun d'ells interessants. Per exemple, queda pendent per una futura ocasió analitzar la influència de l'amplada i la forma de les ales en el moviment descendent d'un helicòpter de paper. Així mateix, es podria mesurar l'angle d'obertura final de les ales amb un estudi efectuat amb llum estroboscòpica, el qual ens permetria ser més precisos a l'hora de fer determinats càlculs.

Només em queda dir, que estic molt orgullosa del meu treball que tant temps i paciència i he dedicat. Però, sobretot estic agraïda a totes les persones que m'han donat suport i consell al llarg d'aquest, primordialment al meu tutor del treball, que des de 4t d'ESO m'ha ajudat a veure el món amb uns altres ulls.

10. AGRAÏMENTS

Fer un treball és com emprendre un vol; fer un treball de recerca és fer un vol de gran recorregut.

Les llavors que he estudiat, no podrien fer el seu viatge de llargues distàncies sense l'ajuda del vent. De la mateixa manera, jo no podria haver desenvolupat aquest treball sense l'ímpetu i suport que m'han donat aquestes persones.

En primer lloc vull agrair la paciència i dedicació del meu tutor, que m'ha fet de guia i m'ha acompanyat per aquest vertiginós trajecte. Sense el seu enginy no hauria set possible fer aquesta recerca

També he d'agrar a Pere Navarro, professor de botànica de la UB, pels consells i informació que m'ha donat i que m'han ajudat a desenvolupar l'herbari (ANNEX 1).

Així mateix, vull expressar el meu agraïment a tot el professorat i personal no docent que han compartit tota la meva etapa educativa. Tots ells m'han ajudat a despertar la meva curiositat científica.

Igualment, tampoc vull deixar-me als meus pares, al meu germà i als meus amics i amigues, per tants mesos de no sentir-me a parlar de res més que no fos aquest treball, per l'empenta i pel refugi, per ser-hi sempre.

Finalment, deixeu-me dir que jo he estat feliç de fer aquest viatge amb vosaltres. Moltes gràcies a tots i totes.

11. REFERÈNCIES BIBLIOGRÀFIQUES

- [1] Paper helicopters. Discover primary science. Disponible a:
http://www.primaryscience.ie/media/pdfs/col/paper_helicopters.pdf [Accedit el 21/07/2018]
- [2] Viquipèdia, 2018. Aerodinàmica. Disponible a:
<https://ca.wikipedia.org/wiki/Aerodin%C3%A0mica> [Accedit el 4/08/2018]
- [3] Roouseau, J. Per què volen els avions?. Calaméo, 2012. Disponible a:
<https://es.calameo.com/books/00186135227d615c7c95d> [Accedit el 4/08/2018]
- [4] Enciclopèdia.cat, 2018. Principi de Bernoulli. Disponible a:
<https://www.enciclopedia.cat/EC-GEC-0009536.xml> [Accedit el 4/08/2018]
- [5] Viquipèdia, 2018. Principi de Bernoulli. Disponible a:
https://ca.wikipedia.org/wiki/Principi_de_Bernoulli [Accedit el 4/08/2018]
- [6] Astroosona. L'equació de Bernoulli. Disponible a:
<http://www.astroosona.net/web/Apunts/L%27Equaci%F3%20de%20Bernoulli.pdf> [Accedit el 4/08/2018]
- [7] Viquipèdia, 2017. Efecte venturi. Disponible a: https://ca.wikipedia.org/wiki/Efecte_Venturi [Accedit el 5/08/2018]
- [8] Viquipèdia, 2018. Efecte Coandă. Disponible a:
https://ca.wikipedia.org/wiki/Efecte_Coand%C4%83 [Accedit el 5/08/2018]
- [9] Rivera, N. La importància del efecto Coanda en el automovilismo y la aviación. Hipertextual, 2016. Disponible a: <https://hipertextual.com/2016/06/efecto-coanda> [Accedit el 5/08/2018]
- [10] Fernández, J. Segunda Ley de Newton Aplicada a la Rotación de un Sólido. FisicaLab. Disponible a: <https://www.fisicalab.com/apartado/segunda-ley-newton-rotacion#contenidos> [Accedit el 6/08/2018]
- [11] A.F.P, 1974. Philippe Petit un temerario de altura. Semana, 2015. Disponible a:
<https://www.semana.com/gente/articulo/philippe-petit-el-equilibrista-que-camino-entre-las-torres-gemelas/447054-3> [Accedit el 13/08/2018]
- [12] UdL, UPC. La llavor. Botànica agrícola i forestal. Disponible a:
<http://botanicavirtual.udl.es/llavor/llavor.htm> [accedit el 14/08/2018]
- [13] Viquipèdia, 2018. Llavor. Disponible a:
https://ca.wikipedia.org/wiki/Llavor#Morfologia_de_la_llavor [Accedit el 14/08/2018]
- [14] A(drián). Semilla del coco de mar. Roca Roja, 2012. Disponible a:
<http://larocaraja.blogspot.com/2012/11/semilla-del-coco-de-mar.html> [Accedit el 14/08/2018]
- [15] Bioenciclopedia. Evolución de las plantas. Disponible a:
<http://www.bioenciclopedia.com/evolucion-de-las-plantas/> [Accedit el 15/08/2018]

- [16] La evolución de las plantas. Ciencia Hoy. Disponible a:
<http://www.cienciahoy.org.ar/ch/ln/hoy68/laevolucion.htm> [Accedit el 15/08/2018]
- [17] M(aulocioni). Árbol filogenético de las plantas. Viquipèdia, 2015. Disponible a:
https://es.wikipedia.org/wiki/Historia_evolutiva_de_las_plantas#/media/File:Filogenia_vegetal.png [Accedit el 15/08/2018]
- [18] REGNE PLANTES (METÀFITS) III. Les Angiospermes. Aula2005. Disponible a:
<http://www.aula2005.com/html/cn1eso/15angiospermes/15angiospermes.htm> [Accedit el 16/08/2018]
- [19] Regne Plantes. Aula 2005. Disponible a:
<http://www.aula2005.com/html/cn1eso/14gimnospermes/14gimnospermes.htm> [Accedit el 16/08/2018]
- [20] Fischer, C. The stoneworts alga *Chara globularis* (Syn.: *Chara fragilis*; Characeae). Wikipedia, 2011. Disponible a:
<https://es.wikipedia.org/wiki/Charophyceae#/media/File:CharaGlobularis.jpg> [Accedit el 17/08/2018]
- [21] Linao, L. Pacific rockweed, Olympic National Park, USA. Wikipedia, 2006. Disponible a:
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pacific_rockweed,_Olympic_National_Park,_USA.jpg [Accedit el 17/08/2018]
- [22] Moody, E. Gracilaria. Wikipedia, 2007. Disponible a:
<https://en.wikipedia.org/wiki/Gracilaria#/media/File:Gracilaria2.JPG> [Accedit el 17/08/2018]
- [23] Krisp, H. Sea Lettuce, *Ulva lactuca*, Family: Ulvaceae, Location: Croatia, Istria, Porec, Lanterna. Wikipedia 2011. Disponible a:
https://es.wikipedia.org/wiki/Ulva_lactuca#/media/File:Meersalat-Ulva-lactuca.jpg [Accedit el 17/08/2018]
- [24] Plantsurfer. Transverse section of a stem of *Rhynia Gwynne-vaughanii*, Lower Devonian Rhynie chert. Wikipedia, 2007. Disponible a:
https://es.wikipedia.org/wiki/Rhynia#/media/File:Rhynia_stem.jpg [Accedit el 18/08/2018]
- [25] Tomasz, K. Ginkgo biloba in palace garden in Radziejowice, Poland. Wikipedia, 2005. Disponible a:
https://ca.wikipedia.org/wiki/Fitxer:Radziejowice_ginkgo_biloba01.jpg [Accedit el 18/08/2018]
- [26] Lobato y Cidras. EVOLUCIÓN VEGETAL: LA CONQUISTA DE LA TIERRA FIRME. Universiad de Vigo, 2012. Disponible a:
<https://www.uv.mx/personal/tcarmona/files/2016/08/Lobato-y-Cidras-2012.pdf> [Accedit el 16/08/2018]
- [27] Moreno, P. Vida y obra de granos y semillas (III, II, IX). La ciència para todos. Disponible a:
http://bibliotecadigital.ilce.edu.mx/sites/ciencia/volumen3/ciencia3/146/htm/sec_5.htm [Accedit el 18/08/2018]

- [28] Cubas, P. Plantas con semillas. Aulados, 2008. Disponible a:
https://www.aulados.net/Botanica/Curso_Botanica/Plantas_semillas/15_Plantas_semillas_texto.pdf [Accedit el 18/08/2018]
- [29] Guàrdia, R. La dispersión de las semillas. Investigación y Ciencia, 2013. Disponible a:
<https://www.investigacionyciencia.es/revistas/investigacion-y-ciencia/alimentacion-587/la-dispersin-de-las-semillas-11531> [Accedit el 18/08/2018]
- [30] Philmarin. Hormiga cabeza Messor barbarus llevándose al nido una cipsela con eleosoma de Centaurea pullata. Wikipedia, 2012. Disponible a:
https://es.wikipedia.org/wiki/Mirmecocoria#/media/File:C._pullata-mbarbatus-1.jpg [Accedit el 19/08/2018]
- [31] Walsh, K. Monsterious Crocodile, Kachikali, Bakau, Gambia. Flickr, 2005. Disponible a:
<https://www.flickr.com/photos/86624586@N00/10176897/> [Accedit el 19/08/2018]
- [32] Torychemistry. Red parrot beautiful eating apple on tree. It bright green wing and a bright red body. It psittacoidea or true parrot and vividly colour and multi colour. Bird strong leg and claw zygodactyl feet. Shutterstock. Disponible a: <https://www.shutterstock.com/es/video/clip-32205676-red-parrot-beautiful-eating-apple-on-tree> [Accedit el 19/08/2018]
- [33] Salo, A. Alpine Pennycress, Thlaspi alpestre - Kerava, Finland. Wikipedia, 2009. Disponible a:
https://species.wikimedia.org/wiki/Thlaspi_alpestre#/media/File:Thlaspi_alpestre_Kev%C3%A4ttaskuruoho_IM7264_C.JPG [Accedit el 19/08/2018]
- [34] Wmpearl. Noce di cocco (Cocos Nucifera) in germinazione. Wikipedia, 2008. Disponible a:
https://es.wikipedia.org/wiki/Cocos_nucifera#/media/File:Coconut_germinating_on_Black_Sand_Beach_Island_of_Hawaii.JPG [Accedit el 19/08/2018]
- [35] L. Nymphaea alba. Plants for a future. Disponible a:
<https://pfaf.org/user/plant.aspx?latinname=Nymphaea+alba> [Accedit el 19/08/2018]
- [36] eduCaixa. La dispersión de las semillas. Disponible a:
https://www.educaixa.com/microsites/El_bosque/Dispersion_semillas/ [Accedit el 19/08/2018]
- [37] Roccia, B.; Preidkman, S.; Estrada, C.; Massa, J. Estudio del “vuelo” de semillas autorrotantes. Asociación Argentina de Mecánica computacional. Cimec, 2013. Disponible a:
<https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/4434> [Accedit el 28/06/2018]
- [38] Azuma, A., and Yasuda, K., Flight performance of rotary seeds. Journal of Theoretical Biology, 138:23-53, 1989.
[http://www.scirp.org/\(S\(vtj3fa45qm1ean45vvffcz55\)\)/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=2128796](http://www.scirp.org/(S(vtj3fa45qm1ean45vvffcz55))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=2128796)
- [39] Pandolfi, C., and Izzo, D., Biomimetic on seed dispersal: survey and insights for space exploration. Bioinspiration & Biomimetics, 8:025003 – 9pp, 2013. Disponible a:
<https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/23648867> [Accedit el 19/08/2018]

- [40] Synder, A. Mora seed (Mora excelsa) from Iwokrama, Guyana. Flickr, 2013. Disponible a: <https://www.flickr.com/photos/29096471@N05/10155454144> [Accedit el 19/08/2018]
- [41] Ward-Smith, A.J., Biophysical Aerodynamics and the Natural Environment. John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [42] McCutchen, C.W., The spinning rotation of ash and tulip tree samaras. Science, 197:691-692, 1977.
- [43] Norberg, R.A., Autorotation, self-stability, and structure of single-winged fruits and seeds (samaras) with comparative remarks on animal flight, Biol. Rev., 48:561-96, 1973.
<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1469-185X.1973.tb01569.x>
- [44] Galaxy Grand Prime. Samsung. Disponible a: <https://www.samsung.com/es/smartphones/galaxy-grand-prime-g531f/SM-G531FZDAPHE/> [Accedit el 22/07/2018]
- [45] HERO6 Black. GoPro. Disponible a: <https://es.shop.gopro.com/EMEA/cameras/hero6-black/CHDXH-601-master.html> [Accedit el 22/07/2018]
- [46] Hyams, Daniel G., 2013. CurveExpert Download Centre. Disponible a: <https://www.curveexpert.net/download/?target=CurveExpert-Basi> [Accedit el 17/06/2018]
- [47] Brown, D. 2018. Tracker vídeo analysis and modelin tool. Disponible a: <http://physlets.org/tracker/> [Accedit el 17/06/2018]
- [48] Parejo, C. Per què volen les coses? Disponible a: http://xtec.gencat.cat/web/.content/alfresco/d/d/workspace/SpacesStore/0022/7e1bb795-9741-4e43-bf6e-d55accb05790/FemVolarEstels_alumnes.pdf [Accedit el 8/06/2018]
- [49] Secret Found to Flight of 'Helicopter Seeds'. Livescience, 2009. Disponible a: <https://www.livescience.com/3672-secret-flight-helicopter-seeds.html> [Accedit el 3/11/2018]
- [50] H. Anns, D. Rethinking the Paper Helicopter: Combinig Statistical and Engineering Knowledge. Teacher's Corner, merican Statistical Association, November, 2005.
- [51] MultiLab. Fourier. Disponible a: <http://fourieredu.com/fwp/support/multilogpro/> o <http://www.keepad.com/Products/Fourier/NovaSoftware/MultiLab/> [Accedit el 12/12/2018]
- [52] Schlichting Christian Ucke, H. J. Der Flug des geflügelten Samens, 1994. Disponible a: https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/gefl_gel_ter_samen.pdf [Accedit el 12/06/2018]
- [53] Roccia, B.; Preidikman, S.; Ceballos, J.; Massa, J. Estudio de la aerodinàmica no lineal e inestacionaria de semillas voladoras autorrotantes. Asociación Argentina de Mecánica Computacional. Cimec, 2014. Disponible a: https://www.researchgate.net/publication/282293635_ESTUDIO_DE_LA_AERODINAMICA_NO_LINEAL_E_INESTACIONARIA_DE_SEMILLAS_VOLADORAS_AUTORROTANTES [Accedit el 28/06/2018]

- [54] Lentink, D., Dickson, W.B., van Leeuwen, J.L., and Dickinson, M.H., Leading-edge vortices elevate lift of autorotating plant seeds. *Science*, 324:1440-1438, 2009.
- [55] Salcedo, E., Treviño, C., Vargas, R.O., and Martínez-Suástegui, L., Stereoscopic particle image velocimetry measurements of the three-dimensional flow field of a descending autorotating mahogany seed (*Swietenia macrophylla*). *The Journal of Experimental Biology*, 216:2017-2030, 2013.
- [56] Green, D.S., The terminal velocity and dispersal of spinning samaras. *Amer. Journal Bot.*, 67(8):1218-1224, 1980.
- [57] Papierhubschrauber. Schlichting, H. Joachim; Rodewald, Bernd. In: *Praxis der Naturwiss.-Physik* 35/5, 30 (1986). <https://hjschlichting.files.wordpress.com/1986/05/bumerang.pdf> o també <https://hjschlichting.wordpress.com/1986/05/16/papierhubschrauber/> o també https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/papierhubschrauber.pdf [Accedit el 18/07/2018]
- [58] Aerodynamic drag. The physics hypertextbook. Disponible a: <https://physics.info/drag/> [Accedit el 3/11/2018]
- [59] Aguado, X. Tema 8: La fuerza de resistència. Universidad de Castilla La Mancha. Disponible a: <https://previa.uclm.es/profesorado/xaguado/ASIGNATURAS/BTD/4-Apuntes/08.pdf> [Accedit el 2/11/2018]
- [60] Portada i contraportada. Tanya, T. Sycamore seed pods. Pinterest Disponible a: <https://www.pinterest.ie/pin/223068987773369264/> [Accedit el 6/01/2019]

